Dieses und alle anderen Mathe-Dokumente unter

www.PaulGuckelsberger.de/Mathematik enthalten:

1. Mathematische Einführungen zur Grundlagen-Auffrischung

und/oder

2. Ergänzende Erläuterungen und Arbeitshilfen zu mathematischen Anwendungen innerhalb der studentischen Bachelor-/ Master-Praktika

sowie

3. Erläuterungen, Anregungen und Lösungshilfen für den Nachhilfeunterricht Gymnasium (G8) ab Kl. 5 bis Abi

Dieses Mathebüchlein bezieht sich auf

Gymnasium & Realschule ab 5. Klasse

Für alle G8-Gymn.-Jahrgangsstufen wird in erster Linie nach dem, wie ich finde, hervorragend aufgebauten Buch von Lambacher/Schweizer (Klett-Verlag) gerechnet. Ich möchte an dieser Stelle alle Mathematiklehrer, die nach diesem Buch arbeiten dürfen dringend empfehlen, ihre Schüler nicht mit zusätzlichen Kopien aus anderen Büchern zu verwirren. Die Lambacher/Schweizer Reihe ist aktuell auf G8 und pädagogisch hervorragend für eine nachhaltige Mathematikvermittlung ausgerichtet. Mit Trainings- und Vertiefungsteilen die keine zusätzlichen Kopien/Arbeitsblätter aus (meist veralteten) andern Quellen erforderlich machen.

Über Eure Meinung sowie Korrekturhinweise freue ich mich, auch wenn ich sicher nicht alles sofort umsetzen kann.

Achtung:** **Das Büchlein wird nie vollständig sein und ich richte mich bei der Arbeit nach dem, was den Schülern unter den Nägeln brennt und nicht nach den Kriterien, die ein Mathebuchverlag vorgibt…..ich versuche damit Mathefrust ein wenig entgegenzuwirken.

Hochschule RheinMain – FB A&B
University of Applied Sciences
Dipl.-Ing. P. Guckelsberger
Kurt-Schuhmacher-Ring 15
65197 Wiesbaden
Tel.: 0611/9495-1453 - Paul.Guckelsberger@hs-rm.de

Seite

1 ....MATHE - KLASSE 5 – GYMNASIUM - G8 - HESSEN 7

1.1 K-5 Gemeinsame Teiler und gemeinsame Vielfache 7

1.2 ggT = größter gemeinsamer Teiler 7

1.3 kgV = kleinste gemeinsame Vielfache 7

1.4 Übungsaufgaben zu kgV und ggT..7

2 ....MATHE – KLASSE 6 – GYMNASIUM – G8 - HESSEN 16

2.1 Brüche und Dezimalbrüche sowie berechnen von Anteilen...............16

2.2 Prozentrechnung..20

2.3 Winkel und Winkelmessung...22
2.3.1 Arten von Winkeln.. 22
2.3.2 Winkelpaare (Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Stufenwinkel, Wechselwinkel)24

3 ....MATHE - KLASSE 7 – GYMNASIUM - G8 - HESSEN 27

3.1 Assoziativgesetz oder „KlammerSetzenWieManWillGesetz“ 27

3.2 Kongruenz (Ähnlichkeitsabbilder) an Drei- & Viereck – 7. / 8. Kl. ..29

3.3 Dreisatzrechnung bei Proportionaler / Antiproportionaler Zuordnung30
3.3.1 Feststellen der Proportionalitäts-Art.. 30
3.3.2 Wie erkenne ich Antiproportionalität?.. 32

3.4 Kreisberechnungen – Formelsammlung..36

3.5 KreisFlächenberechnungen 37

3.6 Kreisberechnung – Kreisausschnitt und -bogen 41

3.7 Terme aufstellen und berechnen..48

3.8 Terme umformen und vereinfachen 48

3.9 Gleichungsterme lösen 48

3.10 Äquivalenzumformungen...49
3.10.1 Additionsregel/Subtraktionsregel 49

3.10.2 Multiplikationsregel/Divisionsregel 50
3.10.3 3. Addition oder Subtraktion eines Teilterms 50

4 ....MATHE - KLASSE 8 – GYMNASIUM - G8 - HESSEN 51

4.1 Flächeninhalt Dreieck 51
4.1.1 A-7-S-108-RS-Marvin: Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks 51

4.2 Geometrie – Winkel am Dreieck – 8. Kl. 51

4.3 Geometrie-Dreieck: Spitz-, Stumpf-, RechtWinklig bei gegeben: SSS55

4.4 Geometrie Höhensatz des Euklid 58

4.5 Geometrie 9. Kl. – sin-cos-tan am rechtwDreieck 61

4.6 Ähnlichkeitsabbildungen = Kongruenz – 7. und 8. Kl. 62

4.7 Geometrie – Prismen – 8. Kl. 63
4.7.1 Berechnung von Prismen 63

4.8 Geometrie – Kreiszylinder – 8. Kl. 64
4.8.1 Berechnung des Kreiszylinders 64
4.8.2 Übungsaufgaben zum Kreiszylinder 65

4.9 Geometrie – Zusammengesetzte Körper – 8. Kl. 66

4.10 Maßstab - Realschule - Hessen 67

4.11 Bestimme die Wanderstrecke 67

4.12 Strahlensätze 68

4.13 Systeme linearer Gleichungen – Gleichungssysteme 74
4.13.1 Lineare Gleichungen mit zwei Variablen 78
4.13.2 Aufgaben - LS8, S. 93, A1 78
4.13.3 Aufgaben - LS8, S. 99, A1-2 79
4.13.4 Additionsverfahren 81
4.13.4.1 Aufgaben - LS8, S. 102, A2 81
4.13.4.2 Aufgaben - LS8, S. 103, A3 - Löse mit Additionsverfahren 81
4.13.4.3 Aufgaben - LS8-K5-Anwendungen (Textaufgaben) - S. 105, A1-5 83
4.13.4.4 Aufgaben - LS8-K5-Anwendungen (Textaufgaben) - S. 106, A6-12 87

4.14 Zusammenfassung: Verfahren zum Lösen eines Gleichungssystems 94

4.15 AbschlussÜbungen vor der Arbeit für Maurice M. – 8. Kl. 95

4.15.1 Prisma und Zylinder, lineare Gleichungen und Gleichungssysteme 95

5 .... RECHNEN MIT QUADRATWURZELN (RADIZIEREN) 97
5.1.1.1 Aufgaben - LS8-K5-- S. 136, A1 - Maurice 12.03.11 97

6 .... QUADRATISCHE FUNKTIONEN – PARABEL – KLASSE 9 - GYM 98

6.1 Quadratische Ergänzung 98
6.1.1.1 BeispAufgabe – Kusch-B1-S. 312 99

6.2 QuadrFunkt.: NormalForm, ScheitelForm, ScheitelPunk S (x | y) ... 100
6.2.1.1 Bestimme die Scheitelform und daraus den Scheitelpunkt S (x | y) 100

7 .... ZINS – RENTE - LOGARITMEN – KL10 - GYM 106

7.1 Optimierungsaufgaben 113
7.1.1.1 BeispAufgabe – LS9-K9- S. 136, A1 - Maurice 04.10.11 113
7.1.1.2 BeispAufgabe – LS9-K9 - Maurice 04.10.11 115

8 .... LÖSEN QUADR. GLEICHUNGEN – PQ-FORMEL – ABC-FORMEL 117

8.1 Abc-Formel zur Lösung der allgemeinen Form der quadr. Gl. 118

9 .... LINEARFAKTOREN – FAKTORIEREN – VIETA-SATZ 123

9.1 Reinquadratische Gleichungen 123

9.2 Quadr Gl. ohne konstantes Glied „q“ löst man durch Ausklammern.123

VIETA-SATZ 124

9.3 Faktorisieren = LinFaktZerl rein quadGl $x^2+px+q = (x-x_1)*(x-x_2)$ .. 125
9.3.1 Faktorisiere durch geschicktes Probieren...125

10 .... LÖSUNGSSTRATEGIEN TRAINIEREN – 9. KL-GYM 134

10.1 AufgTyp: Prozent – Vermehrter Grundwert 134
10.1.1 Aufg.: Der Benzinpreis ist in den letzten drei Monaten.........................134

10.2 Zwei Kräne...: Verhältnisse /Dreisatz / LinGl 137

11 .... GLEICHUNGEN HÖHEREN GRADES IN QUADRATISCHE GLEICHUNGEN ÜBERFÜHREN UND DIESE LÖSEN 142

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

12 .... PROZENTRECHNUNG 143

12.1 Berechnungsformeln 143

12.2 Berechnung Prozentwert 143

12.3 Berechnung Prozentsatz 143

12.4 Berechnung Grundwert 143

12.5 Berechnung vermehrter Grundwert 144

12.6 Berechnung verminderter Grundwert 144

13 .... POTENZEN – 9. KL.GYM 145

13.1 Potenzen mit gleicher Basis 145

14 .... WURZELN – RADIZIEREN – 9. KL.GYM 147

14.1 Potenzgesetze 148

14.2 Wurzelgesetze 148

15 .... MATHE - 11. KLASSE 150

15.1 Differenzenquotient und Differentialquotient 150
15.1.1 Differenzenquotient 150
15.1.2 Differentialquotient 151
15.1.2.1 Aufgabe 152

15.2 Hoch- und Tiefpunkte von Funktionen höheren Grades 155

16 .... WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG - STOCHASTIK 158

17 .... EINHEITEN VON GRÖßEN 159

17.1 Gewicht - Masse 159

17.2 Rauminhalte – Volumen 161

18 .... QUELLENVERZEICHNIS 166

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

1 MATHE - KLASSE 5 – GYMNASIUM - G8 - HESSEN

1.1 K-5 Gemeinsame Teiler und gemeinsame Vielfache

1.2 ggT = größter gemeinsamer Teiler

Bsp.: ggT (6,12) =

T6 = **1, 2, 3, 6** und T12 = **1, 2, 3, 4, 6, 12**

ggT (6,12) = 6

1.3 kgV = kleinste gemeinsame Vielfache

Bsp.: kgV (6, 12) =

V6 = 6, 12, 18…. **Und V12 = 12, 24, 36….**

kgV (6,12) = 12

1.4 Übungsaufgaben zu kgV und ggT

1. Aufgabe – Marvin ArbBl 12.2010

Eine Produktionsanlage besteht aus drei Maschinen A, B und C.

A muss alle 8, B alle 20 und C alle 4 Tage gewartet werden.

In welchem zeitlichen Abstand müssen alle drei Maschinen gleichzeitig gewartet werden ?

Lösungsweg

Du musst **kgV** = **k**leinste **g**emeinsame **V**ielfache suchen.

Du nimmst die größte Tageszahl, bildest deren Vielfache und schaust ob „jede“ der anderen Tageszahlen in einem dieser Vielfache enthalten sind:

1x20 = 20 die 4 passt da 5 mal rein, aber die 8 nicht.

2x20 = 40 das passt !

kgV (4;8;20) = 40 denn: **2 x 20 = 40 = 10 x 4 = 8 x 5**

Antwort:

Alle drei Maschinen müssen nach 40 Tagen gleichzeitig gewartet werden !

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

2. Aufgabe – Marvin ArbBl 12.2010

Stoffbahn 1 = 550 cm lang und Stoffbahn 2 = 650 cm lang sollen je in gleich große, möglichst große Stücke geschnitten werden, ohne das ein Reststück übrig bleibt.

Lösungsweg

Du musst von beiden Stoffbahnlängen den **ggT** = **g**rößter **g**emeinsamer **T**eiler finden.

ggT (550; 650) = 50 denn: 550 : 50 = 11 und 650 : 50 = 13

Antwort:

Der ggT beider Stoffbahnlängen ist 50. Das heißt, jede der beiden Bahnen muss in 50cm lange Stücke geschnitten. So erhält man die größt möglichen Stücke ohne das kleine Reststücke übrig bleiben.

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

3. Aufgabe – Marvin ArbBl 12.2010

Ein Autobus immer nach 7 Minuten wieder vom Bahnhofplatz weg.

Ein zweiter Bus fährt alle 20 Minuten vom Bahnhofplatz weg.

Beide fahren morgens um 3:26 Uhr zum ersten mal weg. Um welche Uhrzeit treffen sie sich das nächste Mal am Bahnhofplatz ?

Lösungsweg

Du musst **kgV** = **k**leinste **g**emeinsame **V**ielfache von 7 und 20 Minuten finden. Diese Minutenzahl addierst du zu der ersten gemeinsamen Abfahrtzeit. Die daraus resultierende Uhrzeit ist die Uhrzeit zu der sich die beiden Busse das erste Mal wieder nach Abfahrt treffen.

kgV (7; 20) = 140 denn: 140 : 7 = **70** und 140 : 20 **= 7**

3.26 Uhr + 140 Minuten = 3.26 + 2.20 = 5.46 Uhr

Die beiden Busse fahren um 3:26 Uhr gemeinsam weg und treffen sich zum ersten Mal wieder an der Bahnhofplatzhaltestelle nach 140 Minuten (2.20 h), also um:

3.26 + 2.20 = 5.46 Uhr

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

4. Aufgabe – Marvin ArbBl 12.2010

Welches sind die **drei** **kleinsten** Zahlen, welche $\mathbf{V_{240}}$ und $\mathbf{V_{440}}$ gemeinsam haben ?

Lösungsweg

kgV (240; 440) =

Antwort:

5. Aufgabe – Marvin ArbBl 12.2010

Das Produkt zweier Zahlen ist 29964672.

Ihr ggT ist 222. Wie groß ist ihr kgV ?

Lösungsweg

Von den nicht bekannten Zahlen „x“ und „y“ ist Produkt x * y = 29964672

Der ggT (x, y) = 222

Gesucht ist das kgV (x, y) = ??

Berechnung:

Denk dir einfach mal zwei kleine Zahlen aus. Berechne ihr Produkt, dann ihr kgV und ihren ggT und das das Produkt aus kgV und ggT.

Zahl "x"	Zahl "y"	x*y	kgV	ggT	kgV*ggT
10	5	50	10	5	50
8	6	48	24	2	48
7	5	35	35	1	35

Du stellst fest: Das Produkt der beiden Zahlen ist genaus so groß wie das Produkt aus ihrem ggT und ihrem kgV. Also: **x * y = kgV * ggT**

Da x * y = 29964672 kannst Du das kgV berechnen:

kgV = (x * y) : ggT = 29964672 : 222 = **134976**

Antwort:

Das kgV ergibt sich, wenn man das Produkt von zwei Zahlen durch ihren ggT teilt.

Hier: **kgV = 134976**

6. Aufgabe – Marvin ArbBl 12.2010

24 runde Torten sollen gerecht an 45 Personen verteilt werden. Wie schneidest du die Torten dazu ?

Lösungsweg

Du musst die 24 Torten in so viele gleich große TortenStücke schneiden, dass jede der 45 Personen gleich viele Stücke bekommt.

Du musst also das kgV von 24 und 45 finden:

kgV (24, 45) = **k**leinste **g**emeinsame **V**ielfache von 24 und 45 finden

Du kannst dazu die Vielfache von 45 und die von 24 berechnen und schauen, wann zum ersten mal das gleiche Ergebnis auftaucht. Das ist dann das kgV von 24 und 45 und damit die Anzahl der Tortenstücke die du aus 24 Torten schneiden musst damit du sie gerecht auf die 45 Personen aufteilen kannst.

Berechnung

Vielfache von 45				
1	*	45	=	45
2	*	45	=	90
3	*	45	=	135
4	*	45	=	180
5	*	45	=	225
6	*	45	=	270
7	*	45	=	315
8	*	**45**	=	**360**
9	*	45	=	405
10	*	45	=	450
11	*	45	=	495
12	*	45	=	540
13	*	45	=	585
14	*	45	=	630
15	*	45	=	675
16	*	45	=	720
17	*	45	=	765

Vielfache von 24				
1	*	24	=	24
2	*	24	=	48
3	*	24	=	72
4	*	24	=	96
5	*	24	=	120
6	*	24	=	144
7	*	24	=	168
8	*	24	=	192
9	*	24	=	216
10	*	24	=	240
11	*	24	=	264
12	*	24	=	288
13	*	24	=	312
14	*	24	=	336
15	*	**24**	=	**360**
16	*	24	=	384
17	*	24	=	408

kgV (24, 45) = kl gem Vielf von 24 u. 45						
1	*	45	=	45	: 24 Torten =	1,88
2	*	45	=	90	: 24 Torten =	3,75
3	*	45	=	135	: 24 Torten =	5,63
4	*	45	=	180	: 24 Torten =	7,50
5	*	45	=	225	: 24 Torten =	9,38
6	*	45	=	270	: 24 Torten =	11,25
7	*	45	=	315	: 24 Torten =	13,13
8	*	45	=	**360**	: 24 Torten =	**15,00**
17	*	24	=	408	: 24 Torten =	17,00

Jede Torte muss in 15 gleiche Stücke geschnit
werden. Bei 24 Torten gibt das dann 360 Stück
Diese 360 Stücke auf 45 Personen verteilt, erg
8 Tortenstücke für jede Person

Antwort:

Das kgV von 24 und 45 ist 360.

Das heißt, wenn man jede der 24 Torten in **15** Stücke schneidet erhält man insgesamt 360 Tortenstücke. Jeder der 45 Personen erhält von den 360 Stücken dann genau **8 Tortenstücke**, denn 360:45 = 8

7. Aufgabe – Marvin ArbBl 12.2010

Der ggT von zwei Zahlen beträgt 238 und das kgV 2856. Wie groß ist das Produkt der beiden Zahlen

Lösungsweg

Von den nicht bekannten Zahlen „a“ und „b“ ist Produkt gesucht. Du kennst von den beiden Zahlen nur das der ggT (a, b) = 238 und ihr kgV (a, b) = 2856 beträgt.

Denk dir einfach mal zwei kleine Zahlen aus. Berechne ihr Produkt, dann ihr kgV und ihren ggT und das das Produkt aus kgV und ggT. Was stellst du fest ?

Prüfe deine Feststellung mit weiteren Zahlen. Du kannst das gut in einer Tabelle machen wie ich es nachstehend gemacht habe:

Berechnung

Zahl "a"	Zahl "b"	a*b	kgV	ggT	kgV*ggT
10	5	50	10	5	50
8	6	48	24	2	48
7	5	35	35	1	35

Für unsere Aufgabe heißt das also, dass das Produkt a * b der unbekannten Zahlen a und b von denen wir nur wissen, dass ihr ggT (a, b) = 238 und ihr kgV (a, b) = 2856 beträgt, gleich dem Produkt aus den bekannten ggT (a, b) = 238 und kgV (a, b) = 2856 ist. Also:

Zahl "a"	Zahl "b"	kgV	ggT	kgV*ggT	a*b
?	?	2856	238	679728	679728

Antwort:

Das Produkt von zwei Zahlen ist immer genauso groß wie das Produkt aus dem ggT und kgV der beiden Zahlen. Hier: 2856 * 238 = 679728

8. Aufgabe – Marvin ArbBl 12.2010

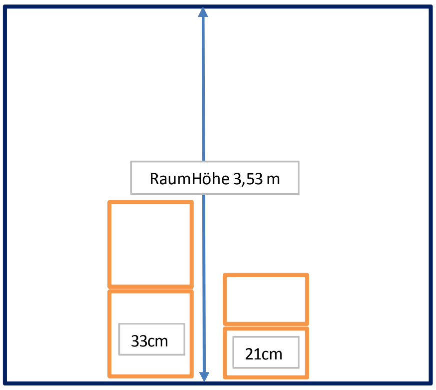
Kisten der Höhe 33 cm werden neben Kisten der Höhe 21 cm in einer 3,53 m hohen Halle gestapelt. Ist es möglich die Kisten so zu stapeln das beide Stapel die gleiche Höhe haben ?

Lösungsweg

Der Raum ist 353 cm hoch.

Du musst also solange Vielfache von 33 cm und von 21 cm errechnen bis du bei einem Wert knapp über 353cm angekommen bist.

Dann schaust Du ob sich dabei gemeinsame Vielfache von 33 und 21 ergeben haben. Wenn ja dann haben beide Kistenstapel diesen Wert als gleiche StapelHöhe.



Berechnung

kgV (33, 21) = kl gem Vielf von 33 u. 21

Vielfache von 33					Vielfache von 21				
1	*	33	=	33	1	*	21	=	21
2	*	33	=	66	2	*	21	=	42
3	*	33	=	99	3	*	21	=	63
4	*	33	=	132	4	*	21	=	84
5	*	33	=	165	5	*	21	=	105
6	*	33	=	198	6	*	21	=	126
7	*	**33**	=	**231**	7	*	21	=	147
8	*	33	=	264	8	*	21	=	168
9	*	33	=	297	9	*	21	=	189
10	*	33	=	330	10	*	21	=	210
11	*	33	=	363	**11**	*	**21**	=	**231**
					12	*	21	=	252
					13	*	21	=	273
					14	*	21	=	294
					15	*	21	=	315
					16	*	21	=	336
					17	*	21	=	357

Antwort:

Die 33cm und die 21 cm hohen Kisten können in dem 3,53 m hohen Raum gestapelt werden.

Sie haben dann bei kgV (33, 21) = 2,31 m die gleiche Höhe.

9. Aufgabe – Marvin ArbBl 12.2010

Die Eingangshalle eines Schulhauses ist 5,6 m lang und 11,2 m breit.

Der Boden soll mit quadratischen Steinplatten belegt werden.

Wie groß dürfen die Platten höchstens sein, wenn man keine Platten zerschneiden möchte.

Lösungsweg

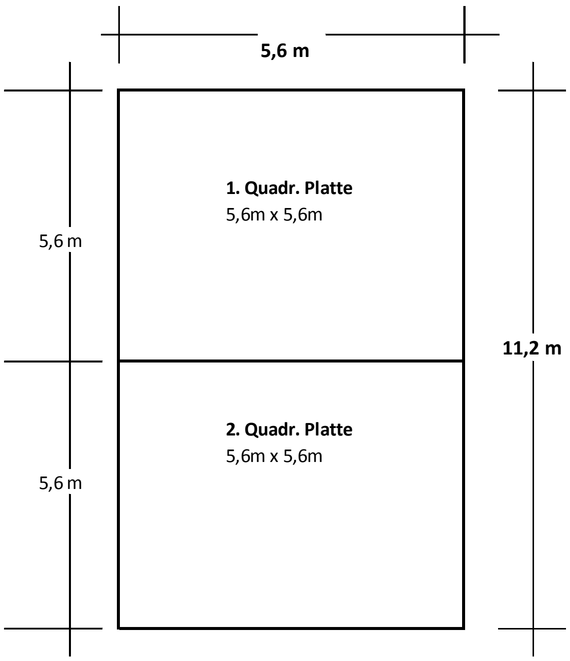
Wichtig ist, dass Du in der Aufgabenstellung erkennst, dass man:

1. quadratische Platten nehmen soll. Also Platten bei denen Länge und Breite gleich groß sind.
2. die Platte mit der größt möglichen Länge und Breite gefunden werden soll.
3. Das die Platten nicht zerschnitten werden dürfen.

Berechnung

Wenn du das kgV von 5,6 und 11,2 findest, hast Du das Maß für die Länge und Breite der größt möglichen Platten die ohne Verschnitt in den Flur passen:

kgV (5,6, 11,2) = 5,6.



Antwort:

Toll, das heißt du brauchst nur 2 Steinplatten von denen jede 5,6m lang und breit ist, um den Flur damit auszulegen

2 MATHE – KLASSE 6 – GYMNASIUM – G8 - HESSEN

2.1 Brüche und Dezimalbrüche sowie berechnen von Anteilen

1. Aufgabe – LS6-S83-A12 - Marvin (ähnliche Aufgabe s. unten)

Die ErdOberfläche EO ist zu 7/10 mit Meeren bedeckt.

3/10 davon entfallen auf den Atlantischen Ozean AtOz

1/5 davon entfallen auf den Indischen Ozean InOz

Der Rest davon entfallen auf den Pazifischen Ozean PaOz

Frage1: Welchen Anteil der Erdoberfläche nehmen die drei Ozeane jeweils ein ?

Lösungsweg zu F1:

Alle 3 Meere zusammen bedecken **7/10** der EO, dann ist der

1) Anteil des AtOz $= \frac{3}{10} \text{ von } \frac{7}{10} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} * \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{21}}{\mathbf{100}}$

2) Anteil des InOz $= \frac{1}{5} \text{ von } \frac{7}{10} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} * \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{50}}$

3) Anteil des PaOz $= \frac{7}{10} (\text{alle 3 Meere}) - \frac{\mathbf{21}}{\mathbf{100}} (\text{AtOz}) - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{50}} (\text{InOz})$

Nun muss man die Brüche zunächst durch erweitern gleichnamig machen, also auf den gleichen Nenner bringen, da man nur Gleichnamige Brüche Addieren und Subtrahieren kann. Wir erweitern auf den größten Nenner 100:

Anteil des PaOz $= \frac{7*10}{10*10} - \frac{\mathbf{21}}{\mathbf{100}} - \frac{\mathbf{7*2}}{\mathbf{50*2}}$

Anteil des PaOz $= \frac{70}{100} - \frac{\mathbf{21}}{\mathbf{100}} - \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{100}} = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{100}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{20}}$

Teil 2 der Aufgabe:

Der Rest der EO ist Festland und verteilt sich wie folgt auf die Kontinente:

1/5 = Afrika;

4/25 = Nordamerika

3/25 = Südamerika

7/75 = Antarktis

3/10 = Asien

3/50 = Ozeanien

1/15 = Europa

Frage-2: Welchen Anteil der EO nehmen die Kontinente jeweils ein ?

Lösungsweg zu F2:

Zuerst berechnen wir, wieviel Festland die Erde insgesamt hat.

Wir wissen aus Teil 1 der Aufgabe, **7/10** der Erde Wasser = Meere sind.

Wenn 7/10 der EO Wasser sind, dann sind $\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$ **der EO Festland**

Von diesen 3/10 Festland der EO berechnen wir nun die Anteile der Kontinente:

1) Anteil Afrika $= \frac{1}{5}$ von $\frac{3}{10} = \frac{1}{5} * \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$ **der EO sind Afrika**

Genauso wird mit den anderen Kontinenten gerechnet.

2. Aufgabe – Marvin (ähnliche Aufgabe s. LambSchw.-6, S. 83)

Die Erdoberfläche ist zu 7/10 mit Wasser bedeckt.
Davon entfallen:
die Hälfte auf den Pazifischen Ozean
drei Zehntel auf den Atlantischen Ozean
ein Fünftel auf den Indischen Ozean.

F1: Welcher Anteil der Erdoberfläche nimmt jedes Meer ein?

von der verbleibenden Landfläche entfallen etwa
1/3 auf Asien
3/10 auf Amerika
11/50 auf Afrika
2/25 auf Europa
1/15 auf Australien und Ozeanien

F2: Welcher Anteil der Erdoberfläche nimmt jeder Erdteil ein ???

Lösungsweg zu F1 – Anteile der 3 Meere:

Wenn $\frac{7}{10}$ der EO Wasser sind, dann sind $\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \mathbf{\frac{3}{10}}$ der EO Landmasse.

Weiterhin gilt nun.

Von den $\frac{7}{10}$ der EO sind nun $\frac{1}{2}$ (die Hälfte) der Pazifische Ozean also: $\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{20}$

Dann sind $\frac{3}{10}$ davon der Atlantische Ozean also: $\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{100}$

Und $\frac{1}{5}$ Indischer also: $\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{50}$

Lösungsweg zu F2 – Anteile der Landmassen der Erdteile:

Wie oben berechnet sind $\frac{3}{10}$ der EO = Landmasse, also gilt:

$\frac{1}{3}$ ist Asien, also $\frac{1}{3}$ von $\frac{3}{10} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ Landmasseanteil von Asien

$\frac{3}{10}$ ist Amerika also: $\frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$ Landmasseanteil von Amerika

$\frac{11}{50}$ ist Afrika also: $\frac{3}{10} \cdot \frac{11}{50} = \frac{33}{500}$ Landmasseanteil von Afrika

$\frac{2}{25}$ ist Europa also: $\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{25} = \frac{6}{250} = \frac{3}{125}$ Landmasseanteil von Europa

$\frac{1}{15}$ ist Australien und Ozeanen also: $\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{15} = \frac{3}{150} = \frac{1}{50}$ Landmasseanteil von Australien

Die Ergebnisse zusammengefasst sind dann:

Pazifik: $\frac{7}{20}$ der Erdoberfläche

Atlantik: $\frac{21}{100}$ der Erdoberfläche

Ind. Ozean: $\frac{7}{50}$ der Erdoberfläche

Asien: $\frac{1}{10}$ der Erdoberfläche

Amerika: $\frac{9}{100}$ der Erdoberfläche

Afrika: $\frac{33}{500}$ der Erdoberfläche

Europa: $\frac{3}{125}$ der Erdoberfläche

Austr. u. Ozeanien: $\frac{1}{50}$ der Erdoberfläche

Zur Probe kann man alle Werte zusammen addieren:

$$\frac{7}{20}+\frac{21}{100}+\frac{7}{50}+\frac{1}{10}+\frac{9}{100}+\frac{33}{500}+\frac{3}{125}+\frac{1}{50}=$$

$$\frac{175}{500}+\frac{105}{500}+\frac{70}{500}+\frac{50}{500}+\frac{45}{500}+\frac{33}{500}+\frac{12}{500}+\frac{10}{500}=\frac{175+105+70+50+45+33+12+10}{500}=\frac{500}{500}=\mathbf{1}$$

Dadurch das 1 rauskommt ist die ganze Erdoberfläche eingeteilt.

2.2 Prozentrechnung

1. Aufgabe – LS6-S165-A1g-l - Marvin M. + Stefan S.
Gib in Prozent an rechne **im Kopf**

1g)

$$\frac{3}{12} = 0{,}25 \rightarrow * 100 = \mathbf{25}\%$$

3 : 12 = **0,25**
30
$_1$24
0 6$_0$

1h)

$$\frac{3}{5} = 0{,}60 \rightarrow * 100 = \mathbf{60}\%$$

1k)

$$\frac{5}{1000} = 0{,}005 \rightarrow * 100 = \mathbf{0{,}05}\%$$

<u>2. Aufgabe</u> – LS6-S165-A2 - Marvin M. + Stefan S.

Gib als Bruchzahl und als Dezimalbruch an. Rechne im Kopf und Kürze wenn möglich

2a)

$$23\% = \frac{23}{100} = 0{,}23$$

2i)

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0{,}20$$

<u>3. Aufgabe</u> – LS6-S165-A3 - Marvin M. + Stefan S.

<u>Fig.R:</u>

4 Teile = 100%

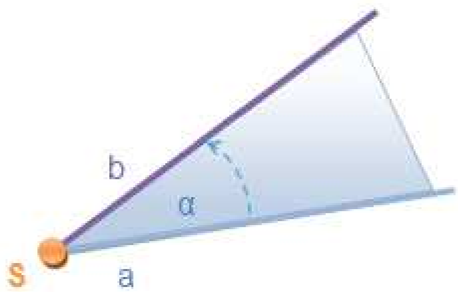
1 Teil = 100 : 4 = 25%

3 Farbteile = 3 * 25 = **75 %**

2.3 Winkel und Winkelmessung

Zu diesem Thema hat Christian Franzki eine sehr schön, verständliche und anschauliche Erläuterung zusammengestellt (http://www.mathematik-wissen.de/winkel.htm#_Toc109755456):

Ein Winkel wird durch zwei Halbgeraden (Strahlen) festgelegt, die von dem gleichen Punkt aus starten. Wir benennen diesen Punkt, von dem aus wir starten, mit Scheitelpunkt oder kurz Scheitel des Winkels und die beiden Halbgeraden nennen wir Schenkel. In dem folgenden Bild heißt der Scheitel S, die Schenkel a und b und der Winkel (die blau markierte Fläche) α (Alpha). Übrigens werden Winkel üblicherweise gegen den Uhrzeigersinn gemessen, also links herum.



Man bezeichnet Winkel für gewöhnlich mit griechischen Buchstaben. Die ersten fünf Buchstaben und die am häufigsten benötigten sind: α = Alpha (entspricht im Deutschen dem a), β = Beta (entspricht im Deutschen dem b), γ = Gamma (entspricht im Deutschen dem g), δ = Delta (entspricht im Deutschen dem d), ε = Epsilon (entspricht im Deutschen dem e).

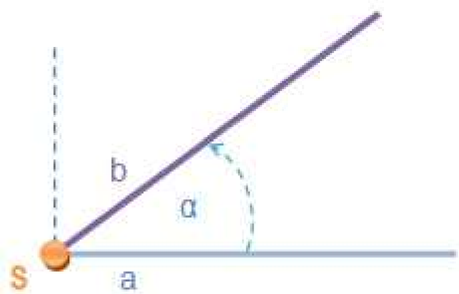
Die Größe eines Winkels wird in der Einheit Grad angegeben und gemessen. Der Einheitswinkel hat daher die Größe 1°.

2.3.1 Arten von Winkeln

Je nachdem wie groß ein Winkel ist kann man diese kategorisieren (also in Gruppen einteilen). Ähnliche Eigenschaften machen mehrere Winkel vergleichbar.

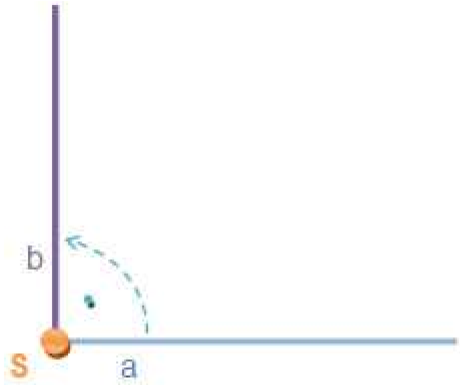
Spitzer Winkel

Es handelt sich um einen spitzen Winkel, wenn der Winkel zwischen 0° und 90° beträgt.



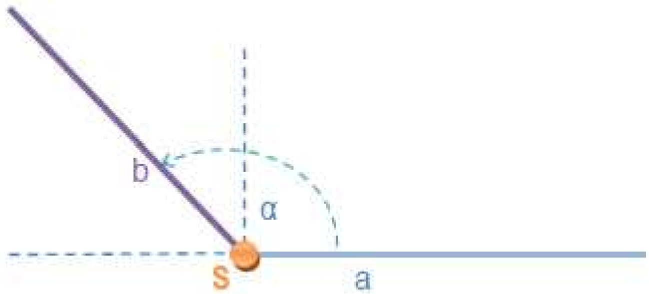
Rechter Winkel

Es handelt sich um einen rechten Winkel, wenn der Winkel genau 90° beträgt. Als wichtigen Spezialfall kennzeichnet man diesen Winkel sehr häufig mit einem Punkt im Halbkreis statt eines griechischen Buchstabens.



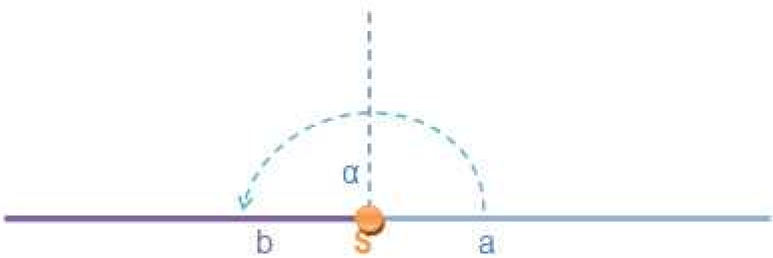
Stumpfer Winkel

Es handelt sich um einen stumpfen Winkel, wenn der Winkel größer ist als 90°, aber kleiner als 180°



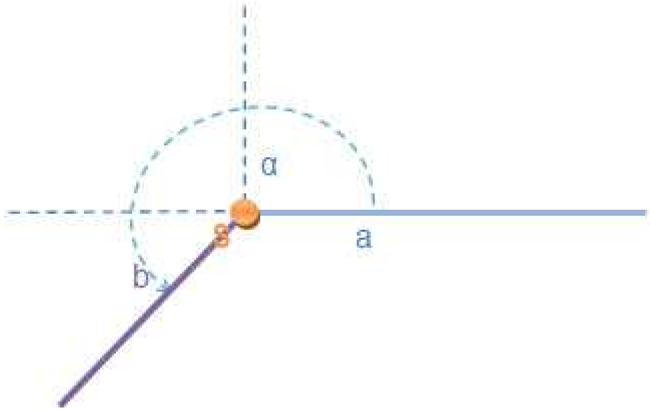
Gestreckter Winkel

Bei einem Winkel von genau 180° spricht man vom gestreckten Winkel. Somit liegen die Schenkel auf einer Geraden.



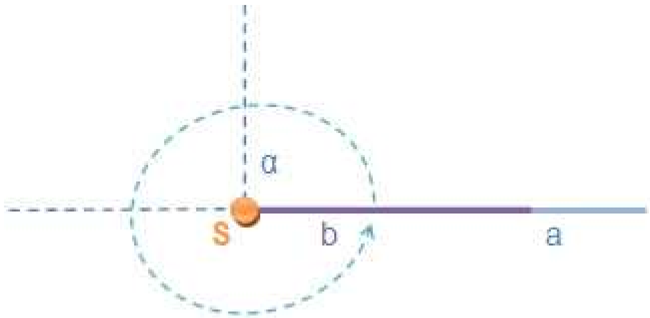
Überstumpfer Winkel

Es handelt sich um einen überstumpfen Winkel, wenn der Winkel größer ist als der gestreckte Winkel, also 180°, aber kleiner als 360°.



Vollwinkel

Man spricht von einem Vollwinkel, wenn der Winkel genau 360° beträgt.

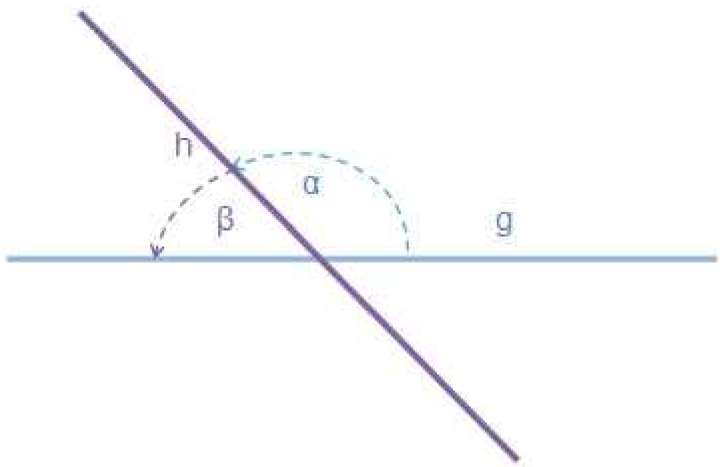


I.

2.3.2 Winkelpaare (Nebenwinkel, Scheitelwinkel, Stufenwinkel, Wechselwinkel)

Nebenwinkel

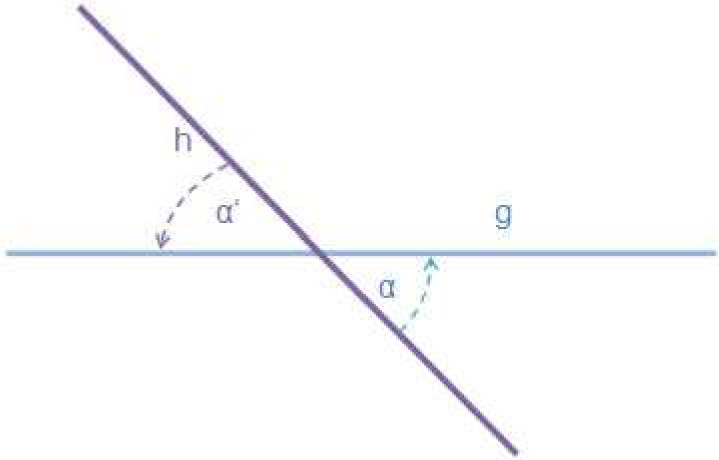
Wenn sich zwei Geraden schneiden, ergänzen sich immer zwei Winkel zu 180° und man spricht von Nebenwinkeln. α und β sind Nebenwinkel und ergänzen sich zu 180°.



Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

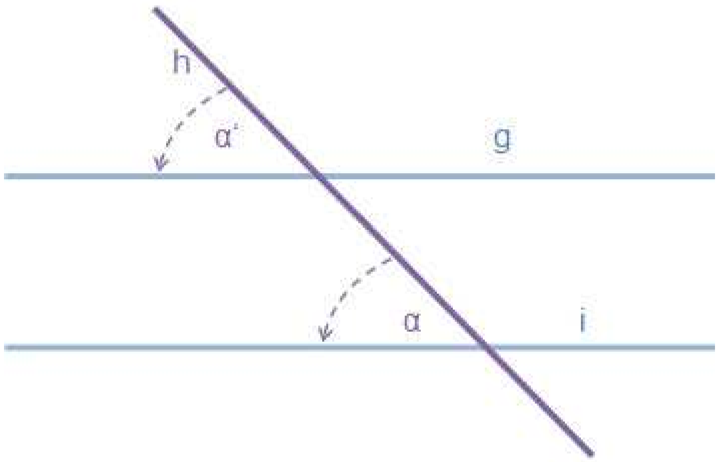
Scheitelwinkel

Die Winkel α und α' liegen sich an zwei kreuzenden Geraden gegenüber. Sie heißen Scheitelwinkel und sind jeweils gleich groß.



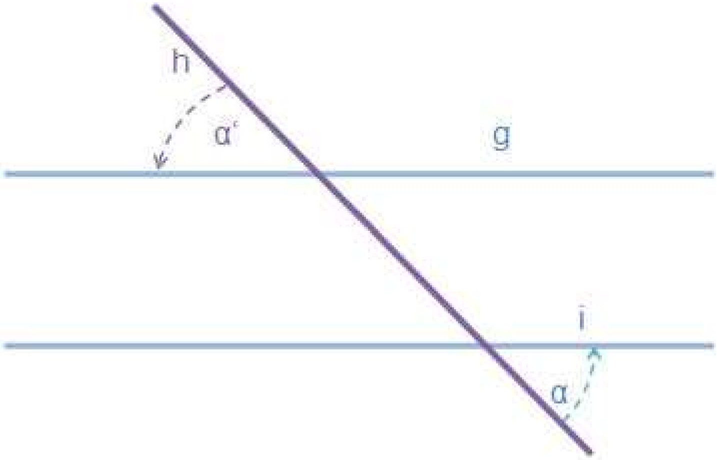
Stufenwinkel

Die Winkel α und α' liegen an der Geraden h, die zweimal von zueinander parallelen Geraden geschnitten wird. Somit sind auch diese Winkel gleich. Man nennt sie Stufenwinkel.

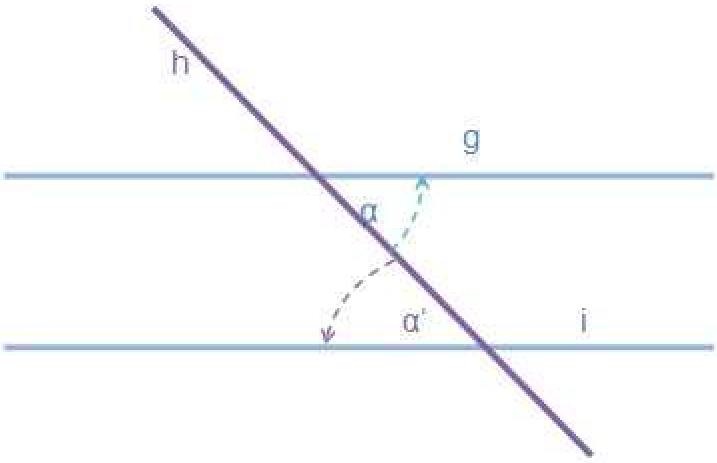


Wechselwinkel

Mit Wechselwinkel bezeichnet man einen Scheitelwinkel zum Stufenwinkel. Dadurch, dass Scheitelwinkel und Stufenwinkel gleichgroß sind, sind auch Wechselwinkel gleichgroß.



oder auch:



3 MATHE - KLASSE 7 – GYMNASIUM - G8 - HESSEN

3.1 Assoziativgesetz oder „KlammerSetzenWieManWillGesetz“

Assoziativgesetz oder „KlammerSetzenWieManWillGesetz“ der Addition

In einer **reinen Addition**saufgabe (es darf also kein Minus, Mal oder geteilt in der Aufgabe vorkommen) kann man Klammern beliebig setzen oder weglassen: (a+b)+c = a+(b+c)

Guckst Du hier: (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9

Achtung!: Das Assoziativgesetz **gilt nicht** für die **Subtraktion!**

Guckst Du hier: (8 - 3) - 2 = **3** **aber** 8 – (3 - 2) = 8 – (1) = **7**

Assoziativgesetz oder „KlammerSetzenWieManWillGesetz“ der Multiplikation

In einer **reinen Multiplikation**saufgabe (es darf also kein Minus, plus oder geteilt in der Aufgabe vorkommen) kann man Klammern beliebig setzen oder weglassen: (a • b) • c = a • (b • c)

Guckst Du hier: (2 • 3) • 4 = 2 • (3 • 4) = 24

Achtung!: Das Assoziativgesetz **gilt nicht** für die **Division!**

Guckst Du hier: (24 : 6) : 2 = **2** aber 24 : (6 : 2) = **8**

Übung ArbBl 7cG Marvin Mendel

Übertrage die Tabelle und ergänze. Bsp.: (6+(-3))+5 = 3+5 = 8

A	b	C	(a+b)+c	a+(b+c)	a+b+c
6	-3	5			
-8	4	-9			
3,6	-5	-2,1			
-0,8	-0,5	1,6			

Die Lösungen zur Eigenkontrolle findest du nachfolgend. Wenn du etwas lernen willst, dann decke sie ab und schau erst rein, nachdem Du versucht hast die Aufgaben in der Tabelle selbst zu lösen.

Lösung der Übungen zu Tab.AssGesetz-1

A	b	c	(a+b)+c	a+(b+c)	a+b+c
6	-3	5	8	8	8
-8	4	-9	-13	-13	-13
3,6	-5	-2,1	-3,5	-3,5	-3,5
-0,8	-0,5	1,6	0,3	0,3	0,3

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Assoziativgesetz zur Multiplikation - Übungen

a	b	c	(a*b)*c	a*(b*c)	a*b*c
-3	4	-8			
2,4	-3	-7,2			
-6,9	-3,1	4,2			
-0,3	7,4	-2,9			

Lösung der Übungen zu Tab.AssGesetz-2

a	b	c	(a*b)*c	a*(b*c)	a*b*c
-3	4	-8	96	96	96
2,4	-3	-7,2	51,84	51,84	51,84
-6,9	-3,1	4,2	89,838	89,838	89,838
-0,3	7,4	-2,9	6,438	6,438	6,438

3.2 Kongruenz (Ähnlichkeitsabbilder) an Drei- & Viereck – 7. / 8. Kl.

Hier mal ein paar Definitionen von „Kongruent".

Nehmt euch die Definition die ihr euch am besten merken könnt:

Kongruenz: Bildet man eine Figur durch Achsspiegelung, Punktspiegelung, Drehung oder Verschiebung ab, so bleiben die Größen der Winkel und die Seitenlängen der Figur unverändert. Dabei entsteht eine Deckungsgleiche, also kongruente Bildfigur. Diese Abbildungen heißen deshalb Kongruenzabbildungen. Zwei kongruente Figuren lassen sich immer durch Kongruenzabbildungen aufeinander übertragen.

Kongruenz: Zwei Figuren heißen kongruent zueinander, wenn man sie mit einer oder mehreren Kongruenzabbildungen (Spiegelung, Drehung, Verschiebung) aufeinander abbilden kann.

3.3 Dreisatzrechnung bei Proportionaler / Antiproportionaler Zuordnung

Wenn Zwei Werte sich gegenseitig beeinflussen, so bezeichnet man sie als Wertepaar zwischen denen eine Zuordnung besteht.

Die Dreisatzrechnung kann man anwenden wenn zwischen zwei Werten, bzw. einem Wertepaar, eine proportionale oder eine antiproportionale Zuordnung besteht.

Man sagt auch: Zwischen den Werten besteht „Proportionalität“ oder „Antiproportionalität“.

In den unterschiedlichen Büchern, findet man oft unterschiedliche Dreisatzmethoden. Wenn ihr schon eine Methode kennt und damit klar kommt, dann ist das okay.

Ich zeige hier ein Dreisatzschema für Proportionalität und Antiproportionalität das meine Schüler bislang recht schnell nachvollziehen und anwenden konnten:

3.3.1 Feststellen der Proportionalitäts-Art

Es gibt **zwei** Proportionalitätsarten:

1. Proportional
2. **Anti**proportional

Für jede dieser beiden Proportionalitätsarten müssen andere Dreisatzregeln beachtet werden.

Daher musst Du bei jeder Aufgabe zuerst prüfen ob Proportionalität oder Antiproportionalität vorliegt.

Proportionalität **liegt vor, wenn eine der folgenden Bedingungen zutrifft:**	**Antiproportionalität** **liegt vor, wenn eine der folgenden Bedingungen zutrifft:**
(1) Wenn der x-Wert vergrößert wird, dann vergrößert sich der zugehörige y-Wert ebenfalls. **Bsp.**: x = 20 Äpfel ergeben y = 1 Liter Saft x = 40 Äpfel ergeben y = 2 Liter Saft	**(1) Wenn der x-Wert vergrößert wird, dann verkleinert sich der zugehörige y-Wert .** **Bsp.**: x = 20 Arbeiter bauen ein Haus in y = 10 Monaten x = 40 Arbeiter bauen ein Haus in y = 5 Monaten
(2) Der Quotient (Ergebnis von Division) der Wertepaare x und y ist immer gleich groß, man sagt er ist konstant. Man nennt ihn Proportionalitätsfaktor **Bsp.**: x = 20 Äpfel ergeben y = 1 Liter Saft: **20:1 = 20** x = 40 Äpfel ergeben y = 2 Liter Saft: **40:2 = 20**	**(2) Das Produkt (Ergebnis von Multiplikation) der Wertepaare x und y ist immer gleich groß. Man sagt es ist konstant. Man nennt es Antiproportionalitätsfaktor** **Bsp.**: x = 20 Arbeiter zu y = 10 Monaten: **20*10 = 200** x = 40 Arbeiter zu y = 5 Monaten: **40*5 = 200**
(3) Der Graph proportionaler Wertepaare x und y ist eine Ursprungsgerade	**(3) Der Graph antiproportionaler Wertepaare x und y ist eine Hyperbel**

Um die richtigen Dreisatzregeln für die jeweilige Aufgabe anzuwenden, muss man zunächst nach vorstehender Tabelle prüfen, welche Proportionalitäts**art** vorliegt. Ihr müsst dabei nicht alle drei Bedingungen prüfen um sagen zu können, ob Proportionalität oder Antiproportionalität vorliegt. Es reicht, wenn **eine** Bedingung vorliegt. Also:

Schritt-1: Erkenne die ProportionalitätsArt!

Am Beispiel der Aufgabe 2, S. 79, LS-7:

In eine Badewanne fließen 24 l innerhalb von 45s. Nach welcher Zeit ist die Wanne mit 160l voll?

Schritt-1: P-/AP-Test: Von **24l** soll auf **160l** geschlossen werden. Also:

Liter *x-Wert*	*Sekunden* *y-Wert*	
> 24l	**> 45s**	*Proportionalität „P" !*

Denn **vergrößere** ich den x-Wert, dann wird der zugehörige y-Wert auch **größer!**

Somit wissen wir jetzt, dass wir den **Dreisatz für Proportionalität** anwenden müssen.

Bei **Proportionalität** sind die mathematischen Operationen **links und rechts immer gleich**:

Schritt-2: AP-Dreisatz:

: 24	24l	45s	**: 24**
*** 160**	1l	1.875	* 160
	160l	**300s**	

Schritt-3: Antwort: Die Badewanne ist nach **300 s** mit **160 l** Wasser gefüllt.

3.3.2 Wie erkenne ich Antiproportionalität?

Antiproportionalität liegt vor, wenn eine der Bedingungen nach vorstehender erfüllt ist.

1. Beispiel:

3 Arbeiter brauchen für eine Arbeit 6 Stunden. Wie viele Stunden brauchen 9 Arbeiter für die gleiche Arbeit

Schritt-1: AntiProportionalitätsProbe (**AP-Probe**) durchführen:

AP-Probe:

X	Y	
3A	**6 h**	
> 3A Mache ich die Anzahl der Arbeiter **größer**	**< 6h** Dann wird die Anzahl der Stunden die sie für die Arbeit brauchen **kleiner**. Denn viele Hände machen der Arbeit ein schnelles Ende!	Antiproportional **„AP“**

Schritt-2: **Dreisatz für AntiProportionalität anwenden:**

3A	6h
9A	

Beachte: Links wird dividiert, rechts wird multipliziert!

Bei **Proportionalität, also dem Gegenteil von Antiproportionalität,** wird Links **und** rechts immer das gleiche gemacht: multipliziert oder dividiert. Hier bei der AP ist es anders: Wenn links multipliziert wird, dann musst du rechts dividieren und umgekehrt.

	3A	6h	
: 3	**1A**	**18h**	*** 3**
	9A		

	3A	6h	
: 3	1A	18h	* 3
*** 9**	**9A**	**2h**	**: 9**

Das Produkt aller Wertepaare ist gleich: 3 * 6 = 1* 18 = 9*2 = 18

Es ist der **Antiproportionalitätsfaktor 18**

Die drei oben niedergeschriebenen Tabellen waren zur Verdeutlichung des Rechengangs. In der Praxis müsst ihr alles RuckZuck, in **nur einer**, der letzten Tabelle runter rechnen. Also jetzt ein paar Aufgaben trainieren und ihr werdet sehen wie schnell ihr die Aufgaben gelöst zu Papier gebracht habt.

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Aufgabe LS:

Eine Dose Farbe reicht für eine rechteckige Fläche mit 4m Breite und 12 m Länge.

Wie lang darf die Fläche sein, wenn sie 5m breit ist?

Schritt-1: AP-Test: Von 4m soll auf 5m geschlossen werden. Also:

> 4m	< 12m

Das heißt, wenn ich den x-Wert 4m vergrößere, dann wird der zugehörige y-Wert < 12m

Es handelt sich also um **AP!**

Somit wissen wir jetzt, dass wir den **Dreisatz für Antiproportionalität** anwenden müssen:

Schritt-2: AP-Dreisatz:

	4m	12m	
: 4	1m	48m	* 4
*** 5**	**5 m**	**9,6 m**	**: 5**

Schritt-3: Antwort: Wenn die dir Rechteckbreite 5 m betragen soll, dann muss die RechteckLänge 9,6m sein, damit die Farbe reicht.

Aufgabe LS7-S.84-A8.:

Ein Passagierschiff startet eine Kreuzfahrt mit **348 Personen** an Bord.
Der Lebensmittelvorrat reicht für **18 Tage**.
Nach **6 Tage** werden **87 Personen** zusätzlich an Bord genommen.

a)Wie lange reicht der Vorrat jetzt noch?

b)Wie viele Personen könnten nach sechs Tagen an Bord genommen werden, wenn die Kreuzfahrt insgesamt 14Tage dauert?

Lösung zu a) Wie lange reicht der Vorrat jetzt noch?

Schritt-1: AP-Test:

Wenn ich 348 Personen **vergrößere**, dann **verkleinern** sich die 18 Tage Vorrat

> 348 P	< 18 T

Es handelt sich also um **AP!**

Somit wissen wir jetzt, dass wir den **Dreisatz für Antiproportionalität** anwenden müssen, dass heißt, links und rechts mit **entgegengesetzten** Vorzeichen rechnen.

Wichtige Vorüberlegung:

Für die 348 Personen reicht der Essensvorrat 18 Tage. Nach 6 Tagen, reicht der Essensvorrat für 348 Personen noch (18-6) 12 Tage. Für das Aufstellen des Dreisatzes brauchen wir die 18 Tage also nicht. Wir stellen fest:

Bei 348 Personen reicht der Vorrat 12 Tage!

Bei 435 Personen (348+87 = 435) reicht der Vorrat wie viele Tage?

Als DreisatzTabelle sieht das wie folgt aus:

Schritt-2: AP-Dreisatz:

	Anzahl Personen	*Anzahl Tage*	
Auf 1 P runter rechnen	348 P	12 T	
: 348	1 P	4176 T	* 348
***435**	**435 P**	**9,6 T**	**: 435P**

Schritt-3: Antwort: Wenn am 6. Tag zu den 348 Personen noch 87 Personen dazu steigen, dann reicht der Essensvorrat nicht mehr für 12 Tage sondern gerade noch für **9,6 Tage**, also nicht mehr ganz 10 Tage.

Lösung zu **b**) Wie viele Personen könnten nach **6 Tagen** an Bord genommen werden, wenn die Kreuzfahrt insgesamt **14 Tage** dauert?

__PG:__ Bei dieser Aufgabenstellung sieht man einmal mehr, dass die Aufgaben von Erwachsenen konzipiert wurden und damit eine Denkweise/Erfahrung voraussetzen auf die Kinder der Klasse 6/7 (insbesondere wenn Sie G8ler sind) noch nicht zurückgreifen können. Daher sollten solche Aufgaben entfernt oder umformuliert werden. Die meisten meiner Schützlinge sind davon ausgegangen, dass der Vorrat nun bei 348 Personen für 14 Tage reicht. Hiersollten die Kinder eine zweifelsfreie Aufgabenstellung bekommen damit Sie nicht an Missverständnissen verzweifeln und damit die Lust an der Mathematik verlieren. Also die Aufgabe b) könnte besser lauten:

Ein Passagierschiff startet eine Kreuzfahrt mit 348 Personen an Bord.
Der Lebensmittelvorrat reicht für 18 Tage.
Wie viel Personen können nach 6 Tagen zusätzlich an Bord genommen, wenn die Reise auf 14 Tage verkürzt wird, aber der 18Tage-Essensvorrat an Bord bleibt?

__Überlegung zum Lösungsweg__:

(1) Auch hier betrachtet die 18 – 6 = **12 Tage**, in denen man 348 Personen hätte versorgen können.
(2) Wir rechnen nun aus, wie viele Tage wir 1 Person mit diesem 12-Tagevorrat der 348 Personen versorgen könnten.
(3) Dann rechnen wir aus, wie viel Personen wir 14 – 6 = **8 Tage** lang versorgen könnten, weil die Reise ja jetzt ab dem 6-ten Tag nur noch 8 Tage (6+8 = 14T) dauert.
(4) In diesen nur 8 Tagen können wir auf jeden Fall **__mehr__** Personen füttern (nennen wir sie **x-Personen**) als in den 12 Tagen, __wo es für 348 Personen reicht__.
(5) Die Anzahl der Personen die nun am Tag 6 zusteigen kann, so dass alle bis zum Tag 14 gefüttert werden können ist dann: x-Personen – 348 Personen.

__Schritt-2:__ AP-Dreisatz:		*Anzahl der Tage*	*Anzahl der Personen*	
Auf 1 Tag runter rechen		12 T	348 P	
	:12	1 T	4176 P	*** 12**
Auf 8 Tage hoch rechen	***8**	**8 T**	**522 P**	**: 8**

522 Pers. (14TageTour) – 348 Pers. (18TageTour) = **174 Personen können dazu kommen**

__Schritt-3__: Antwort:

522 Personen können 14 Tage gefüttert werden
348 Personen können 18 Tage gefüttert werden
Wird die Reise also von 18 auf 14 Tage gekürzt dann können zu den 348 Personen noch 522-348 = 174 Personen dazu kommen.

__Anders formuliert:__
Wenn 348 Personen einen Essensvorrat für eine 18-Tage-Reise haben, am Tag 6 aber noch weitere Personen dazukommen wollen, dann reicht der Vorrat nicht 18 Tage. Man muss die Reise also verkürzen um am Tag 6 noch zusätzlich Personen aufnehmen zu können. Wenn man die Reise statt 18 Tage nun nach 14 Tagen beendet dann können am Tag 6 noch 522-348 = 174 Personen für die restlichen 8 Tage bis zum Tag 14 mitversorgt werden.

3.4 Kreisberechnungen – Formelsammlung

KreisFlächeninhalt:

$$A = \pi * r^2$$

bzw.:

$$A = \pi * \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

KreisUmfang:

$$U = d * \pi$$

bzw.:

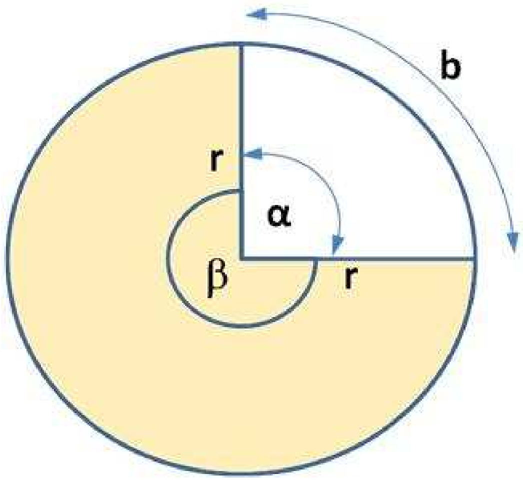
$$U = 2 * r * \pi$$

KreisAusschnitt:

$$A = \frac{\alpha}{360} * \pi * r^2$$

KreisBogenLänge:

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r$$



Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

3.5 KreisFlächenberechnungen

Aufgabe LS7-S.109-A2a.:

Ein Radiosender hat eine Reichweite von 45 km.
Ges.: Wie viel km² groß ist sein Sendegebiet?

Lösung-1:

Geg. Sende-Reichweite 45km entspricht = Radius des Sendekreises **r = 45km**

Das Sendegebiet hat damit eine Fläche von

$$A = \pi * r^2 \quad = \quad \pi * 45^2 \quad = \quad 6361{,}73\ km^2$$

Aufgabe LS7-S.109-A2b.:

Das Nördlinger Ries enstand vor 15 Millionen Jahren durch den Einschlag eines 1km großen Meteoriten. Es hat einen Durchmesser von ca. 25 km.
Ges.: Berechne den Flächeninhalt des Nördlinger Ries

Lösung-1:

Geg. **d = 25 km**

Das Nördlinger Ries hat damit eine Fläche von

$$A = \pi * \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad = \quad \pi * \left(\frac{25}{2}\right)^2 \quad = \quad 490{,}87\ \text{km}^2$$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Aufgabe LS7-S.109-A3a.:

Geg.: U = 37,7 cm
Ges.: Berechne den Flächeninhalt

Lösung-1:

Ges.: Kreisfläche $\boldsymbol{A = \pi * \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ | d = ????

Um A berechnen zu können, benötigst Du den Durchmesser d.
Da der Umfang gegeben ist, kann man den Kreisdurchmesser „d“ durch auflösen von $\boldsymbol{U = d * \pi}$ nach „d“ berechnen und dann in die Kreisflächenformel einsetzen:

$\boldsymbol{U = d * \pi}$ | nach „d“ auflösen

$\boldsymbol{d = \frac{U}{\pi}}$ | mit U = 37,7 cm

$\boldsymbol{d = \frac{37{,}7\,cm}{\pi}} = 12\ cm$ | d = 12 jetzt in die Kreisflächenformel einsetzen

----

Kreisfläche $\boldsymbol{A = \pi * \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ | d = 12cm

$\boldsymbol{A = \pi * \left(\frac{12}{2}\right)^2 = 113{,}10\ cm^2}$ |

Antwort: Ein Kreis mit dem Umfang U = 37,7 cm hat einen Flächeninhalt von A = 113,10 cm²

Aufgabe LS7-S.109-A3b.:

Geg.: Kreis A = 78,5 cm²
Ges.: Radius r = ? cm

$\boldsymbol{A = \pi * r^2}$ | nach „r" auflösen

$\boldsymbol{r^2 = \frac{A}{\pi}}$ | damit das Quadrat über „r" verschwindet radizieren wir beide Seiten der Gleichung, d.h. wir ziehen die Wurzel aus beiden Seiten.

$\boldsymbol{\sqrt{r^2} = \sqrt{\frac{A}{\pi}}}$ | A = 78,5 einsetzen

$\boldsymbol{r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{78{,}5\ cm}{\pi}} = 4{,}99 = 5\ cm}$ |

Aufgabe LS7-S.109-A4a.:

Geg.: Rundtisch mit d = 1,80 m
Ges.: Rundtischdecke die allseits 20 cm überhängt

Lösung-1:

Ges.: Kreisfläche $\boldsymbol{A = \pi * \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ | d = ????

Um A des Tischtuches berechnen zu können, benötigst Du den Durchmesser d.

d = 1,80m + 2 * 0,20m = 2,20 m

TischtuchKreisfläche $\boldsymbol{A = \pi * \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ | d = 2,20m

$\boldsymbol{A = \pi * \left(\frac{2{,}20}{2}\right)^2 = 0{,}605\ m^2}$ |

Aufgabe LS7-S.109-A5.:

Geg.: Rundtisch mit d = 1,80 m
Ges.: Rundtischdecke die allseits 20 cm überhängt

Lösung-1:

Ges.: Kreisfläche $\boldsymbol{A = \pi} * \left(\frac{d}{2}\right)^{2}$ | d = ????

Um A des Tischtuches berechnen zu können, benötigst Du den Durchmesser d.

d = 1,80m + 2 * 0,20m = 2,20 m

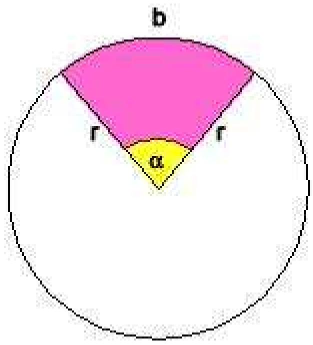
TischtuchKreisfläche $\boldsymbol{A = \pi} * \left(\frac{d}{2}\right)^{2}$ | d = 2,20m

$\boldsymbol{A = \pi} * \left(\frac{2{,}20}{2}\right)^{2} = \boldsymbol{3{,}80\ m^{2}}$ |

3.6 Kreisberechnung – Kreisausschnitt und -bogen

KreisAusschnitt: $$\boxed{A = \frac{\alpha}{360} * \pi * \; r^2}$$

KreisBogenLänge: $$\boxed{b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r}$$



Aufgabe LS7-S.111-A2.:

Berechne den Flächeninhalt des Kreisausschnittes mit
Geg.: **r = b = 1,00m.**

Lösung-1:

$$A = \frac{\alpha}{360} * \pi * \; r^2 \quad | \; r = 1,0 \; | \; \alpha = ?$$

Es fehlt uns also der Winkel α um die KreisauschnittsFläche A berechnen zu können.

(1) Kreisbogen-Formel nach dem Winkel α auflösen.
(2) Dann die gegebenen Werte für r und b einsetzen ergibt den gesuchten Winkel.
(3) Diesen Winkel dann in die KreisausschnittFlächenformel einsetzen.

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r \quad | \; nach\, \alpha \;\; auflösen \; | \; beide\, Seiten \;\; * 360 \; : (\pi * 2)$$

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r \quad | \;\; beide\, Seiten \;\; * 360 \; : (\pi * 2 * r)$$

$$\frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)} = \alpha$$ bzw. $$\boxed{\alpha = \frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)}}$$

$$\alpha = \frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)} \quad | \; r = 1m \; | \; b = 1m$$

$$\alpha = \frac{1 * 360}{(\pi * 2 * 1)}$$

$$\alpha \; = 57,30\,° \quad | \; jetzt\ in\ die\ KreisausschnittFormel\ einsetzen$$

$$A = \frac{\alpha}{360} * \pi * \; r^2 \quad | \; r = 1,0 \; | \; \alpha = 57,30\,°$$

$$A = \frac{57,30}{360} * \pi * \; 1^2 \quad = \quad 0,5\; m^2$$

Aufgabe LS7-S.111-A3.:

Berechne zu einem Kreis mit dem Radius r den Mittelpunktswinkel α des Bogens der Länge b und wenn du Lust hast auch den Flächeninhalt A des zugehörigen Kreisausschnittes.

3a) r = 4,5 cm; b = 5,0 cm.

Lösung-1:

$$A = \frac{\alpha}{360} * \pi * r^2 \quad | \; r = 1,0 \; | \; \alpha = ?$$

Es fehlt uns also der Winkel α um die KreisauschnittsFläche A berechnen zu können.

(1) Kreisbogen-Formel nach dem Winkel α auflösen.
(2) Dann die gegebenen Werte für r und b einsetzen ergibt den gesuchten Winkel.
(3) Diesen Winkel dann in die KreisausschnittFlächenformel einsetzen.
(4) **Tipp**: Zwischenrechnungen einfach ein Stück nach rechts einrücken, dass macht deine Rechnung für dich und andere übersichtlich, strukturiert und nachvollziehbar.

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r \quad | \; nach\ \alpha \ auflösen \; | \; beide\ Seiten \ * 360 \ : (\pi * 2)$$

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r \quad | \; beide\ Seiten \ * 360 \ : (\pi * 2 * r)$$

$$\frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)} = \alpha \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{\alpha = \frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)}}$$

$$\alpha = \frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)} \quad | \; r = 4,5cm \; | \; b = 5cm$$

$$\alpha = \frac{5cm * 360}{(\pi * 2 * 4,5cm)}$$

$$\alpha = 63,66\,° \quad | \; jetzt\ in\ die\ KreisausschnittFormel\ einsetzen$$

$$A = \frac{\alpha}{360} * \pi * r^2 \quad | \; r = 4,5cm \; | \; \alpha = 63,66\,°$$

$$A = \frac{63,66}{360} * \pi * 4,5^2 \quad = \quad 11,25\ cm^2$$

3b) **r = 1,4 m; b = 1,0 m**.

Lösung-1:

$$A = \frac{\alpha}{360} * \pi * \ r^2 \quad | \ r = 1,0 \ | \ \alpha = ?$$

Es fehlt uns also der Winkel α um die KreisauschnittsFläche A berechnen zu können.

(1) Kreisbogen-Formel nach dem Winkel α auflösen.
(2) Dann die gegebenen Werte für r und b einsetzen ergibt den gesuchten Winkel.
(3) Diesen Winkel dann in die KreisausschnittFlächenformel einsetzen.
(4) **Tipp**: Zwischenrechnungen einfach ein Stück nach rechts einrücken, dass macht deine Rechnung für dich und andere übersichtlich, strukturiert und nachvollziehbar.

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r \quad | \ nach \ \alpha \ \ auflösen \ | \ beide\,Seiten \ * 360 \ : (\pi * 2)$$

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r \quad | \ beide\,Seiten \ * 360 \ : (\pi * 2 * r)$$

$$\frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)} = \alpha$$ bzw. $$\boxed{\alpha = \frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)}}$$

$$\alpha = \frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)} \quad | \ r = 1,4 \ m \ | \ b = 1,0 \ m$$

$$\alpha = \frac{1 \ m * 360}{(\pi * 2 * 1,4m)}$$

$$\alpha \ = 40,93\,° \quad | \ jetzt \ in \ die \ KreisausschnittFormel \ einsetzen$$

$$A = \frac{\alpha}{360} * \pi * \ r^2 \quad | \ r = 1,4m \ | \ \alpha = 40,93\,°$$

$$A = \frac{40,93}{360} * \pi * \ 1,4^2 \quad = \quad 0,7 \ m^2$$

3c) r = 3,5 cm; b = 10,0 cm.

Lösung-1:

$$A = \frac{\alpha}{360} * \pi * \ r^2 \quad | \ r = 3,5\ cm\ |\ \alpha = ?$$

Es fehlt uns also der Winkel α um die KreisauschnittsFläche A berechnen zu können.

(1) Kreisbogen-Formel nach dem Winkel α auflösen.
(2) Dann die gegebenen Werte für r und b einsetzen ergibt den gesuchten Winkel.
(3) Diesen Winkel dann in die KreisausschnittFlächenformel einsetzen.
(4) **Tipp**: Zwischenrechnungen einfach ein Stück nach rechts einrücken, dass macht deine Rechnung für dich und andere übersichtlich, strukturiert und nachvollziehbar.

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r \quad | \ nach\ \alpha\ \ auflösen\ \ |\ beide\ Seiten\ \ * 360\ : (\pi * 2)$$

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r \quad | \ \ beide\ Seiten\ \ * 360\ : (\pi * 2 * r)$$

$$\frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)} = \alpha \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{\alpha = \frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)}}$$

$$\alpha = \frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)} \quad | \ r = 3,5\ cm\ |\ b = 10,0\ cm$$

$$\alpha = \frac{10\ cm * 360}{(\pi * 2 * 3,5\ cm)}$$

$$\alpha\ = 163,70\,° \quad | \ jetzt\ in\ die\ KreisausschnittFormel\ einsetzen$$

$$A = \frac{\alpha}{360} * \pi * \ r^2 \quad | \ r = 3,5\ cm\ |\ \alpha = 163,70\,°$$

$$A = \frac{163,70}{360} * \pi * \ 3,5^2 \quad = \quad 17,50\ cm^2$$

Aufgabe LS7-S.111-A4.:

Bestimme für einen Kreisausschnitt mit dem Flächeninhalt A, Bogenlänge b, Kreisradius r und den Mittelpunktswinkel α die jeweils fehlende Größe.

4a) r = 4cm; α = 30° | 4b) r = 6cm; b = 2,5 cm | 4c) A = 60 dm²; r = 13,8 dm

4a) **r = 4cm; α = 30°**

Ges.: Flächeninhalt A, Bogenlänge b

Bogenlänge

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r \quad | \; \mathrm{r} = 4\mathrm{cm}; \; \alpha = 30°$$

$$b = \frac{30}{360} * \pi * 2 * 4\,cm = 2{,}09\,cm \quad |$$

Fläche

$$A = \frac{\alpha}{360} * \pi * r^2 \quad | \; \mathrm{r} = 4\mathrm{cm}; \; \alpha = 30°$$

$$A = \frac{30}{360} * \pi * 4^2 = 4{,}19\,cm^2$$

++

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

4b) **r = 6cm; b = 2,5cm**

<u>**Ges.**</u>: Flächeninhalt A, MittelpktWinkel **α**

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r \quad | \ nach\ \alpha \ \ auflösen \ \ | \ beide\ Seiten \ \ * 360 \ : (\pi * 2)$$

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r \quad | \ \ beide\ Seiten \ \ * 360 \ : (\pi * 2 * r)$$

$$\frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)} = \alpha$$ bzw. $$\boxed{\alpha = \frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)}}$$

$$\alpha = \frac{b * 360}{(\pi * 2 * r)} \quad | \ r = 6\ cm \ | \ b = 2,5\ cm$$

$$\alpha = \frac{2,5\ cm * 360}{(\pi * 2 * 6\ cm)}$$

$$\alpha = 23,87\,° \quad | \ jetzt\ in\ die\ KreisausschnittFormel\ einsetzen$$

$$A = \frac{\alpha}{360} * \pi * r^2 \quad | \ r = 6\ cm \ | \ \alpha = 23,87\,°$$

$$A = \frac{23,87}{360} * \pi * 6^2 = 7,50\ cm^2$$

4c) A = 60dm²; r = 13,8dm

Ges.: Bogenlänge b, MittelpktWinkel **α**

$$A = \frac{\alpha}{360} * \pi * \ r^2 \quad | \ nach\ \alpha \ \ auflösen \ \ | \ beide\ Seiten \ \ * 360 \ : (\pi * r^2)$$

$$\alpha = \frac{A * 360}{(\pi * r^2)} \quad | \ A = 60\ dm^2 \ | \ r = 13,8\ dm$$

$$\alpha = \frac{60\ dm^2 * 360}{(\pi * 13,8^2)} \quad = \quad 36,10°$$

Bogenlänge

$$b = \frac{\alpha}{360} * \pi * 2 * r \quad | \ \alpha = 36,10° \ | \ r = 13,8\ dm$$

$$b = 8,70\ dm$$

3.7 Terme aufstellen und berechnen

[LS7, S.154 f.f, Training S. 177]

Ein Term ist z.B.: 5+2; 7*2; (a+3); oder 8 – e : 2.

Wenn also Zahlen oder Zahlen und Variablen durch Rechenzeichen bzw. Rechenvorschriften miteinander verbunden sind, sind nennt man sie einen „**Term**“. Auch Summe, Differenz, Produkt und Quotient von Termen sind wieder Terme.

Im Nenner darf kein Term stehen, der die Zahl 0 ergibt!

3.8 Terme umformen und vereinfachen

a) 3x + (-6-x) = 3x-6-x = 3x-x-6 = 2x-6

b) 3+x-(2x+3) = 3+x-2x-3 = 3-3-2x+x = -x

c) 12x-24 = 12(x-2) oder

= 6*2x-6*4 = 6(2x*4)

Probe: 6(2x*4) =

d) -36x - 18 = -18(2x+1) oder

= -9*4x - 9*2 = -9 (4x + 2)

Probe: -9 (4x + 2) =

3.9 Gleichungsterme lösen

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

3.10 Äquivalenzumformungen

Gleichung bestehen aus zwei Termen mit einem Gleichheitszeichen dazwischen.

Term1 = Term2

Aber nur wenn die zwei Terme wertgleich sind, stimmt das für alle Werte.

Meist sind Terme1 und Term2 aber nicht wertgleich, also müssen wir die Zahlen suchen, die man für die Variablen einsetzen kann, für die man eine wahre Aussage erhält

Wenn wir also eine Gleichung haben, wie 2x + 3 = x + 9, dann ist nicht offensichtlich, was wir für x einsetzen dürfen. Unser Ziel ist es also rechnerisch zu bestimmen, welche Werte x annehmen darf. Wir wollen am Ende x = „irgendeine Zahl“ stehen haben. Dafür müssen wir die Gleichung nach x auflösen.

Wir müssen also solange Umformungen vornehmen, die so genannten **Äquivalenzumformungen**, bis wir nach x aufgelöst haben. Dazu haben wir folgende Möglichkeiten:

3.10.1 Additionsregel/Subtraktionsregel

Wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Zahl addieren oder subtrahieren, dann ändert sich die Lösungsmenge nicht. Welche Zahl wir addieren oder subtrahieren zeigen wir, indem wir die Rechenoperation hinter einem senkrechten Arbeitsstrich aufschreiben.

Beispiel

$$\begin{aligned} x+3 &= 9 \quad |-3 \\ x+3-3 &= 9-3 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist für diese Gleichung also 6. Die Probe können wir machen, indem wir die Zahl(en) der Lösungsmenge in die Ursprungsgleichung einsetzen. 6 + 3 = 9 ist wahr, also haben wir richtig gerechnet.

3.10.2 Multiplikationsregel/Divisionsregel

Beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren

Beispiel

$$
\begin{aligned}
2x &= 8 \quad |:2 \quad \text{oder alternativ:} \quad |\cdot\frac{1}{2} \\
2x\cdot\frac{1}{2} &= 8\cdot\frac{1}{2} \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

3.10.3 3. Addition oder Subtraktion eines Teilterms

Auf beiden Seiten der Gleichung einen Teil-Term wie $2x$ oder $5x^2$ oder $(2x + 1)$ addieren oder subtrahieren, dann ändert sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
3x &= 2x + 2 \,|-2x \\
3x - 2x &= 2x - 2x + 2 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

Vorsicht: Multiplizieren oder Dividieren der Variablen x stellt meistens keine sinnvolle Äquivalenzumformung dar. In dem Fall, dass x dadurch komplett wegfällt, kommt man sogar zu einem falschen Ergebnis.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
3x &= 2x \,|:x \quad \text{unzulässige Operation!} \\
3 &= 2 \quad \text{falsches Ergebnis!}
\end{aligned}
$$

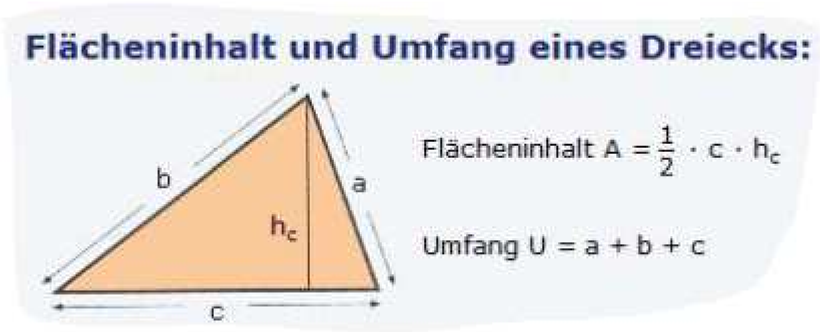
Diese Gleichung scheint nicht lösbar, wir sagen für einen solchen Fall, die Lösungsmenge ist leer. Aber das stimmt nicht, denn recht offensichtlich ist 0 eine Lösung dieser Gleichung. Und damit haben wir auch die Erklärung, warum wir falsch gerechnet haben. Denn wir teilen durch eine Variable und die dürfte auch Null sein, aber durch Null dürfen wir nicht teilen! Deshalb beim Teilen durch Variablen immer gut aufpassen!

Richtig wäre gewesen:

$$
\begin{aligned}
3x &= 2x \quad |-2x \\
3x - 2x &= 2x - 2x \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

4 MATHE - KLASSE 8 – GYMNASIUM - G8 - HESSEN

4.1 Flächeninhalt Dreieck

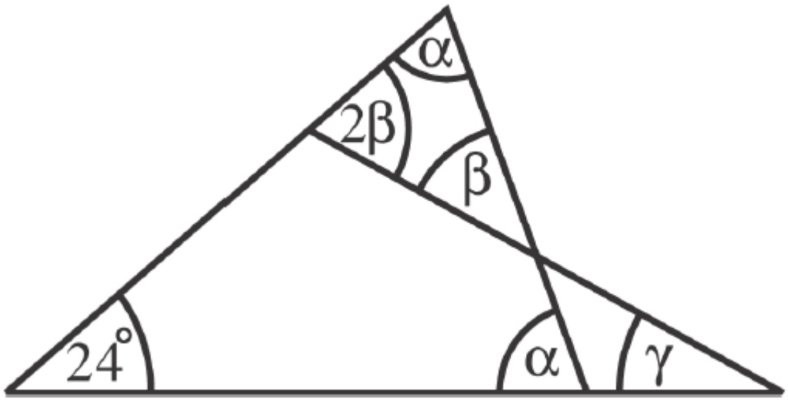


4.1.1 A-7-S-108-RS-Marvin: Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks

4.2 Geometrie – Winkel am Dreieck – 8. Kl.

MATHEMATIK-WETTBEWERB 2009/2010 Gymn. 8. Kl - HESSEN 1. RUNDE

P4: Berechne in der Figur die Größe der Winkel α, β und γ



Lösungsweg

Im ersten Dreieck ist der Winkel 24° gegeben und die beiden anderen Winkel heißen beide α.

Das bedeutet Sie sind gleich groß: α = α

Berechnung von Winkel α im 1. Dreieck

$180 = 24 + 2\alpha$

Wobei: $2\alpha = 180 - 24$

$2\alpha = 156$ nach α auflösen. Also beide Seiten geteilt durch 2, damit α links alleine steht. Damit ergibt sich:

Winkel α = 156/2 = **78°**

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Berechnung von Winkel β im 2. Dreieck

$180 = \alpha + 2\beta + \beta$ Wir können für $\alpha = 78°$ einsetzen und weil die Summe der Winkel = 180° sein muss können wir sagen:

$2\beta + \beta = 180 - 78$

$2\beta + \beta = 102°$ Jetzt Nach β auflösen. Dazu β links ausklammern.

$\beta (2 + 1) = 102°$ Die Klammer kann man ausrechnen: 2+1 = 3

$\beta * 3 = 102°$ Beide Seiten durch 3 teilen damit β links alleine steht

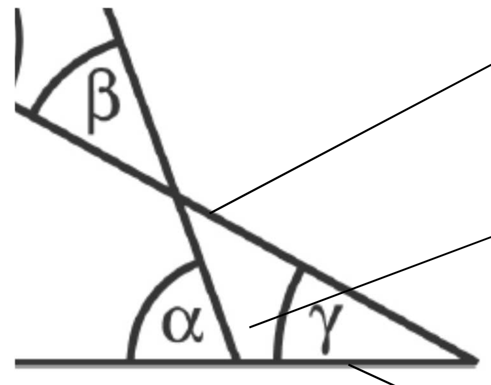
β = **34°** Beide Seiten durch 3 teilen damit β links alleine steht. Der andere Winkel in diesem 2. Dreieck hat die Größe 2β, also:

2β = 2*34= **68°**

Weiter nächste Seite

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Berechnung von Winkel Gamma γ im 3. Dreieck rechts unten



Nennen wir den Winkel β1.

Weil Gegenwinkel immer gleich groß

Nennen wir den Winel α1

Winkel α1 = 180 – α = 180 – 78 = 102

Damit ergibt sich der

Winkel γ = 180 - β1 - α1

Winkel γ = 180 – 34° - 102°

4.3 Geometrie-Dreieck: Spitz-, Stumpf-, RechtWinklig bei gegeben: SSS

In Anlehnung an die sehr gute Website http://www.mathematik-wissen.de

8. Aufgabe – Maurice ArbBl „TEST-Training" 05.2011

Gib an, ob das Dreieck stumpf-, spitz- oder rechtwinklig ist.

8a. a = 2cm; b = 6cm; c = 3 cm => **Achtung! Diese Aufgabe ist unsinnig, hat keine Lösung, kann nur ein Schreibfehler auf dem Arbeitsblatt sein, das den Schülern ausgeteilt wurde !!**

8b. a = 3cm; b = 4cm; c = 5 cm

Lösungsweg zeichnerisch

Wichtig ist, dass Du erst mal weißt, woran man ein stumpf-, spitz- oder rechtwinkliges Dreieck erkennt, also die Definition dieser Dreiecksarten kennst. Dann kannst Du die Dreiecke zeichnen, wobei du die richtige Zeichenmethode kennen muss. Dann kannst du die Winkel messen und sagen um welche Dreiecksart es sich jeweils handelt (stumpf-, spitz- oder rechtwinkliges Dreieck)

1. Definition

Stumpfwinkliges Dreieck:	Ein Dreieck bei dem **ein** Winkel **größer 90° und kleiner 180°** ist, heißt **stumpfwinkliges Dreieck**.
Spitzwinkliges Dreieck:	Ein Dreieck bei dem **alle** Winkel **kleiner 90°** sind, heißt **spitzwinkliges Dreieck**.
Rechtwinkliges Dreieck:	Ein Dreieck bei dem **ein** Winkel ein **rechter Winkel, also genau 90° ist,** heißt **rechtwinkliges Dreieck**.

1. Zeichneriche Lösung zu 8b

Zirkel, Bleistift und Geodreieck brauchst Du.

Dreieckskonstruktion bei gegebenen Seitenlängen a, b und c

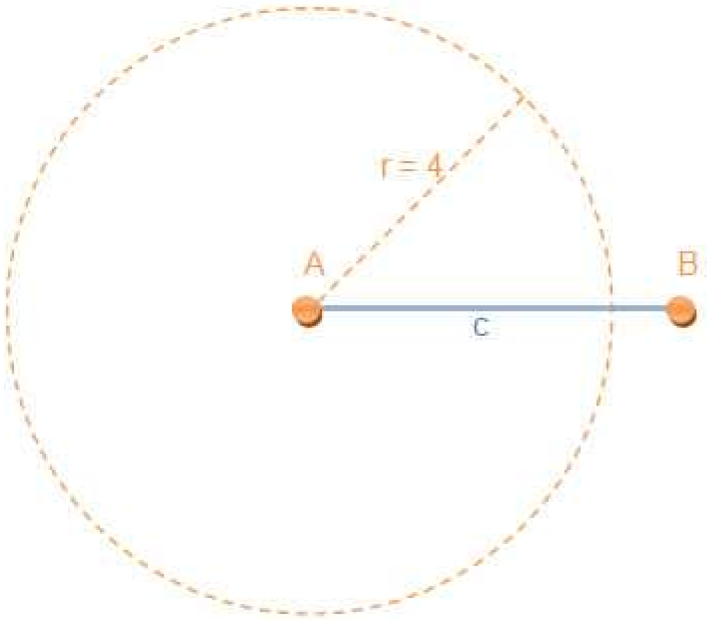
Wir wollen ein Dreieck konstruieren, bei dem wir die Seitenlängen a, b und c vorgeben. Dafür benötigen wir ein Geodreieck (oder Lineal), ein Zirkel, Papier und Stift oder ein entsprechendes Computerprogramm.

Wir geben die Längen vor mit: a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm

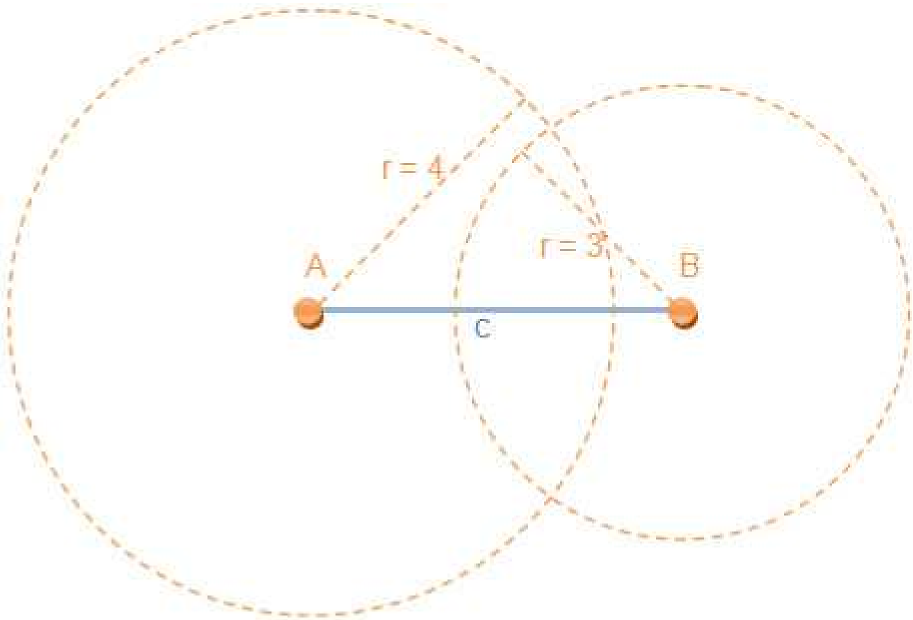
Wir beginnen mit der Grundseite c, das ist die Strecke gegenüber vom Dreieckspunkt C. Sie verbindet die Dreieckspunkte A und B. Zeichnen mit dem Geodreieck die Strecke c = 5 cm.

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

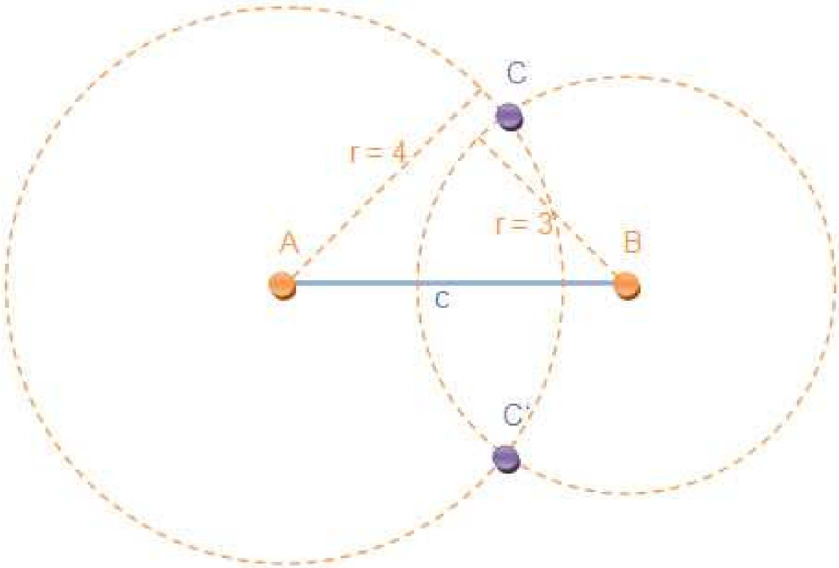
Stelle den Zirkel auf b = 4 cm ein, weil wir die Strecke b zeichnen wollen. Zeichnen diesen Kreis mit dem Radius 4 cm um den Punkt A, da die Strecke b bei A beginnt (gegenüber von Punkt B).



Im nächsten Schritt wollen wir die Strecke a = 3 cm zeichnen. Dafür stellen wir den Zirkel auf einen Radius von 3 cm ein und zeichnen einen entsprechenden Kreis um den Punkt B, da die Strecke a bei B beginnt (gegenüber von Punkt A).



Wir haben jetzt zwei Kreise. Vom Punkt A ist jeder Kreispunkt des Kreises mit dem Radius 4 cm gleich 4 cm entfernt, sodass der Punkt C schon einmal auf dem linken Kreis liegen muss. Der Punkt C muss aber auch 3 cm vom Punkt B entfernt sein und deshalb auch **gleichzeitig** noch auf dem rechten Kreis liegen. Ein Punkt, der das beides gleichzeitig erfüllt ist der Schnittpunkt der beiden Kreise. Also mit anderen Worten, der Schnittpunkt der beiden Kreise ist vom Punkt A 4 cm entfernt und vom Punkt B 3 cm. Es gibt zwei Möglichkeiten, sodass wir diese Punkte erst einmal einzeichnen.



Da man die Punkte bei Dreiecken gegen den Uhrzeigersinn beschriftet, ist der obere Punkt C der des eigentlichen Dreiecks, aber auch das Dreieck, das entsteht, wenn man die Punkte A und B mit C' verbindet, hat den gleichen Flächeninhalt, die gleichen Winkel und die gleichen Seitenlängen und ist somit kongruent zum eigentlichen Dreieck. Es ist nämlich das gespiegelte Dreieck zur Spiegelachse c.

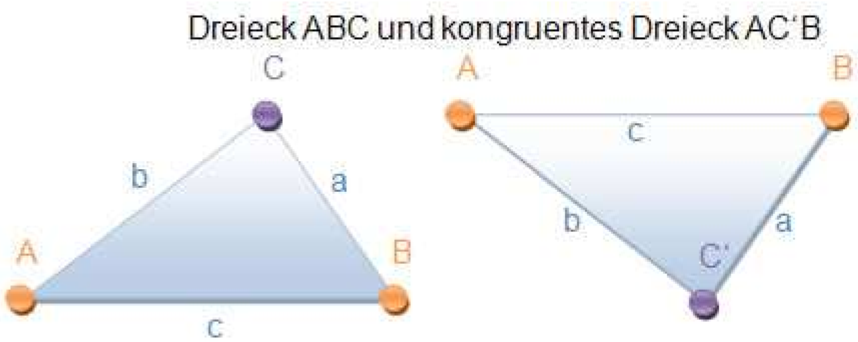
Messen der Winkel

Wir messen **einen rechten** Winkel.

Lösung: Das Dreieck ist ein rechtwinkliges Dreieck !

Weitere Erkenntnis:

Dadurch wird klar, mit drei gegebenen Seitenlängen ist ein Dreieck immer kongruent zu jedem Dreieck, dass die gleichen Seitenlängen hat.

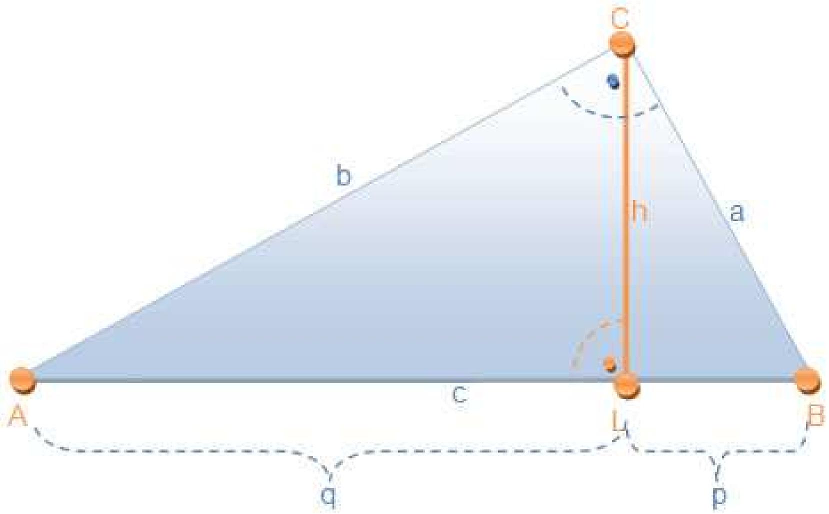


4.4 Geometrie Höhensatz des Euklid

Höhe im rechtwinkligen Dreieck: $\mathbf{h^2 = p \cdot q}$.

Diese Behauptung wollen wir herleiten und damit beweisen:

1. Zeichnen ein rechtwinkliges Dreieck ABC, den Lotfußpunkt (Punkt an dem die Höhe die Dreiecksseite schneidet) nennen wir L.



Gegeben: Hypotenusenabschnitte q und p.

Die Höhe teilt das große rechtwinklige Dreieck in zwei weitere, kleinere rechtwinklige Dreiecke.

Es gilt: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$ **(Dreieck ABC)**
$\mathbf{q^2 + h^2 = b^2}$ **(Dreieck ALC)**
$\mathbf{h^2 + p^2 = a^2}$ **(Dreieck CLB)**

Außerdem bekannt: $\mathbf{q + p = c}$

Die gegebenen Informationen bauen wir derart zusammen, dass in den Formeln nur noch h, p und q übrig bleiben

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad | \text{ersetze } a^2 = h^2 + p^2, \; b^2 = q^2 + h^2 \text{ und } c = q + p$$

$$\overbrace{\left(h^2 + p^2\right)} + \overbrace{\left(q^2 + h^2\right)} = \overbrace{\left(q + p\right)}^2$$

$$h^2 + p^2 + q^2 + h^2 = q^2 + 2pq + p^2 \quad | -q^2 - p^2$$

$$2h^2 = 2pq \quad |:2$$

$$h^2 = pq$$

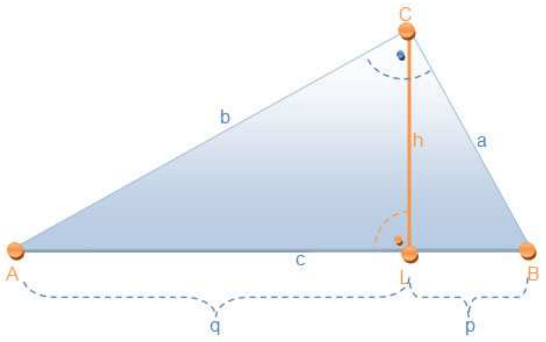
.

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

9. Aufgabe – Maurice ArbBl „TEST-Training" 05.2011

Berechne den Hypotenusenabschnitt q:

Geg: h = 5 cm; p = 5cm



Lösungsweg

$h^2 = p \cdot q$ | : p

$q = h^2 : p$

q $= 5^2 : 5 = 25 : 5 =$ **5 cm**

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

10. Aufgabe – Maurice ArbBl „TEST-Training“ 05.2011

Berechne die Länge der Seite x:

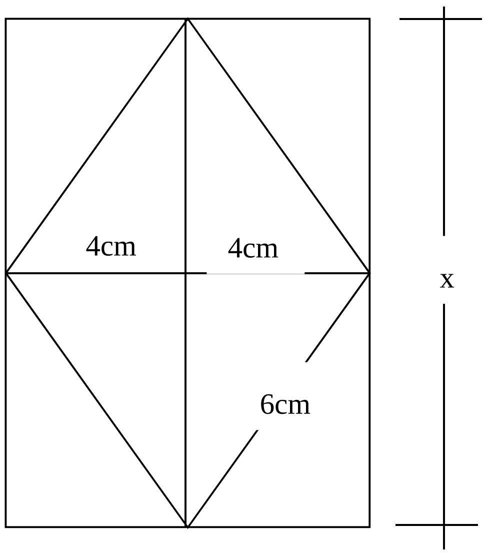
$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

$\mathbf{b^2 = c^2 - a^2}$

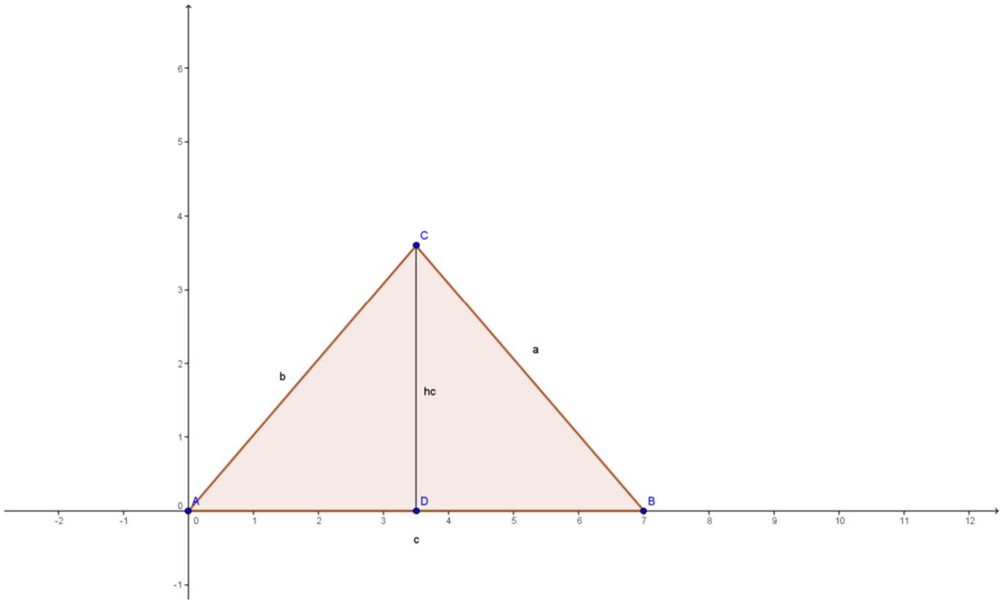
$\mathbf{b^2 = 6^2 - 4^2}$

$\mathbf{b^2 = 20 \quad | \sqrt{}}$

$\mathbf{b = 4{,}47}$ **Damit ist x = 2 * b = 2 * 4,47 = 8,94 cm**



4.5 Geometrie 9. Kl. – sin-cos-tan am rechtwDreieck



Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

4.6 Ähnlichkeitsabbildungen = Kongruenz – 7. und 8. Kl.

Hier mal ein paar Definitionen von „Kongruent“.

Nehmt euch die Definition die ihr euch am besten merken könnt:

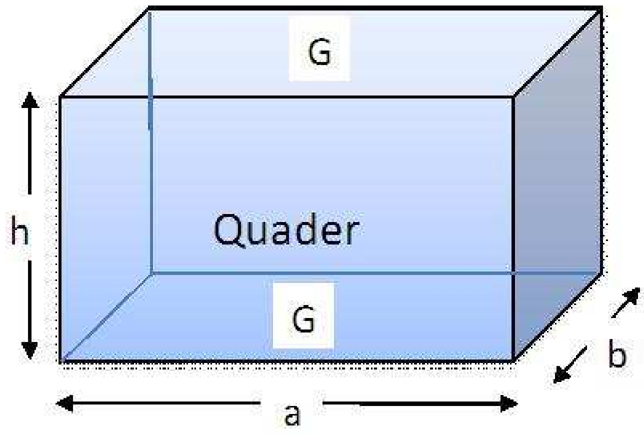
Kongruenz: Bildet man eine Figur durch Achsspiegelung, Punktspiegelung, Drehung oder Verschiebung ab, so bleiben die Größen der Winkel und die Seitenlängen der Figur unverändert. Dabei entsteht eine Deckungsgleiche, also kongruente Bildfigur. Diese Abbildungen heißen deshalb Kongruenzabbildungen. Zwei kongruente Figuren lassen sich immer durch Kongruenzabbildungen aufeinander übertragen.

Kongruenz: Zwei Figuren heißen kongruent zueinander, wenn man sie mit einer oder mehreren Kongruenzabbildungen (Spiegelung, Drehung, Verschiebung) aufeinander abbilden kann.

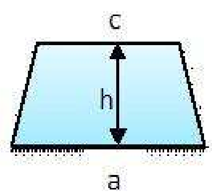
Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

4.7 Geometrie – Prismen – 8. Kl.

Prisma	**(1)** Zwei zueinander parallele, kongruente **Vielecke** als Grundfläche oben und unten **(2)** Seitenflächen sind Rechtecke deren Seitenkanten parallel und gleich lang sind

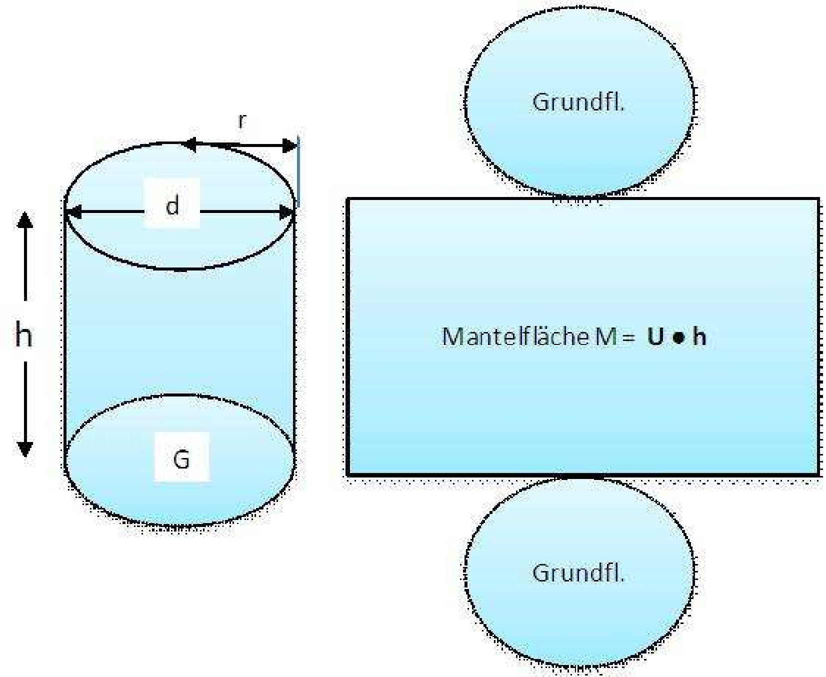


4.7.1 Berechnung von Prismen

Volumen:	$\mathbf{V} = \boldsymbol{G} \quad \boldsymbol{h}$ | $G = \frac{V}{h}$ | $h = \frac{V}{G}$	
MantelFläche:	$\mathbf{M} = \mathbf{U} \quad \mathbf{h}$ | Durch Umstellen erhält man: U = M/ h | h = M/U	
GrundFläche:	$\mathbf{G} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ | Für Quader $G = \frac{a \quad b}{2}$ | Für Dreieck $\mathbf{G} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{\mathbf{2}} \quad \boldsymbol{h}$ | Für Trapez	
OberFläche:	$\mathbf{O} = \mathbf{2G} + \mathbf{M}$ | mit **M** = U • h O = 2G + U • h | $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{O} - \mathbf{2G}}{\mathbf{U}}$ Nur für Quader gilt: **O = 2 (ab + ah + bh)**	

4.8 Geometrie – Kreiszylinder – 8. Kl.

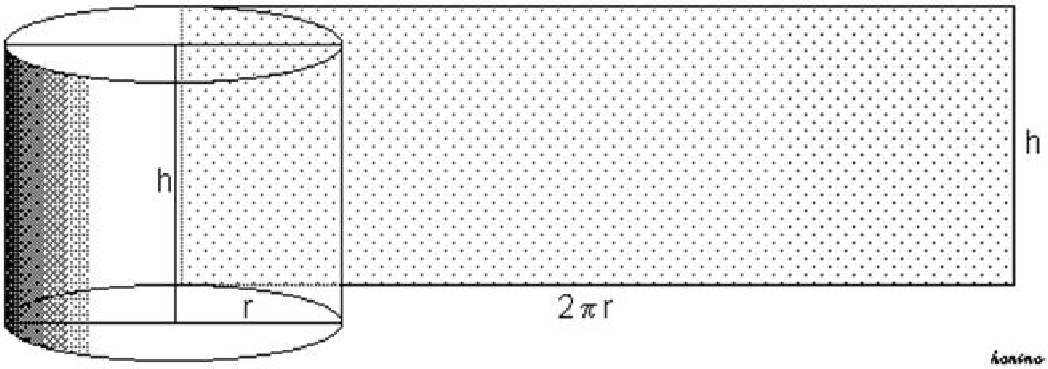
Zylinder	**(1)** Körper, zwei kongruenten **Kreisen** als Grundfläche oben und unten **(2)** Seine Mantelfläche ist ein Rechteck



4.8.1 Berechnung des Kreiszylinders

Volumen:	$\mathbf{V} = \pi r^2 \; h$
MantelFläche:	$\mathbf{M} = \mathbf{U} \bullet \mathbf{h}$ | wobei $U = 2\pi r$ $\mathbf{M} = 2\pi r \bullet \mathbf{h}$
GrundFläche:	$\mathbf{G} = \pi r^2$
OberFläche:	$\mathbf{O} = 2\mathbf{G} + \mathbf{M}$ | mit $\mathbf{M} = 2\pi r \bullet h$ $\mathbf{O} = 2\pi r^2 + 2\pi r \; h$ $O = 2\pi r \; (r + h)$

4.8.2 Übungsaufgaben zum Kreiszylinder



LS8, S.82, A4

Geg: r = 6 cm; M = 450 cm²

Ges: Höhe h und die zwei fehlenden Größen

M = U • h | **nach „h“ umstellen**

$$\boldsymbol{h = \frac{M}{U}}$$ | U = $2\pi r$ einsetzen

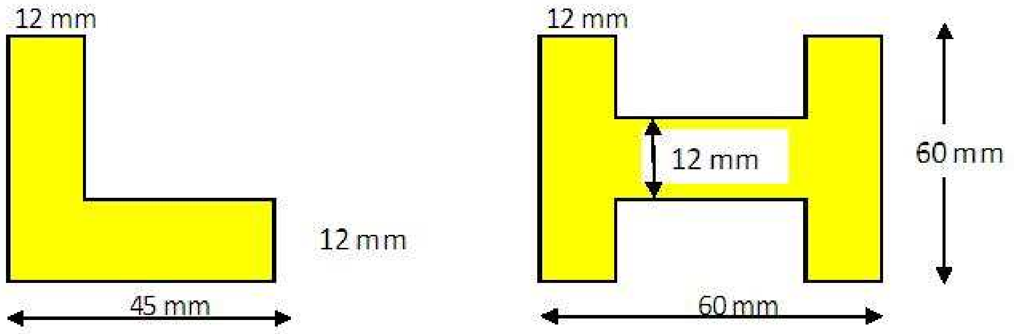
$$h = \frac{M}{2\pi r} = \frac{450}{2\pi 6}$$

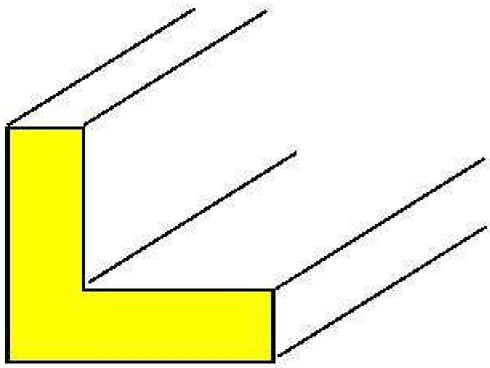
Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

4.9 Geometrie – Zusammengesetzte Körper – 8. Kl.

LS8, S.83, A2 (linke Figur)

In Fig. 1 sind Querschnitte von Stahlträgern gegeben (Länge jedes Trägers 2,8m). Berechne das Volumen und den Oberflächeninhalt jedes Trägers.



4.10 Maßstab - Realschule - Hessen

4.11 Bestimme die Wanderstrecke

1. Aufgabe – Marvin Arbeit 1.10.2014

a) Bestimme die Wanderstrecke der Klasse 8ar mit einem Faden für den Kartenmaßstab 1:100 000.

b) Wie lang wäre diese Strecke auf einer Karte im Maßstab 1:40.000 dargestellt?

Lösungsweg zu a:

Faden entlang der Strecke legen.

Fadenlänge = Streckenlänge = 8 cm

Umrechnen in wahre Länge: 1cm auf Karte = 100.000 cm im Gelände

8 cm • 100.000 = 800.000 cm | umrechnen in km ⇒ **1km** = 1000 m = 1000 * 100 cm = **100.000 cm**

$$\frac{800.000}{100.000} = \mathbf{8\ km\ Wanderstrecke}$$

Lösungsweg zu b:

Umrechnen in wahre Länge: 1 cm auf Karte = 40.000 cm im Gelände

Wir rechnen die 11 km Geländestrecke in cm um, teilen das Ergebnis durch 40.000 cm und erhalten so die cm-Länge auf der Karte im Maßstab 1:40.000

8 km = 800.000 cm | umrechnen in km ⇒ **1km** = 1000 m = 1000 * 100 cm = **100.000 cm**

$$\frac{800.000}{40.000} = \mathbf{20cm}\ \text{ auf der 1: 40.000er Karte}$$

Kontrolle:

Auf einer Karte messen wir eine Strecke von 20 cm.

Die Karte ist im Maßstab 1:40.000 gezeichnet.

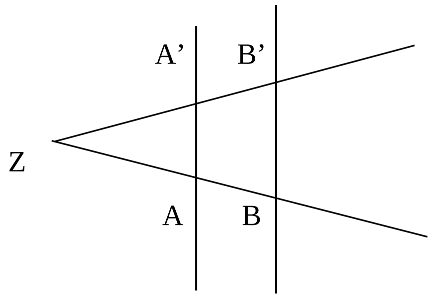
Wieviel km sind es im wahren Gelände?

20 cm • 40.000 = 800.000 cm | umrechnen in km ⇒ **1km** = 1000 m = 1000 * 100 cm = **100.000 cm**

$$\frac{800.000}{100.000} = \mathbf{8\ km\ Wanderstrecke} \quad \Rightarrow \mathbf{o.k.!}$$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

4.12 Strahlensätze



Werden 2 Strahlen, die von einem Punkt ausgehen, von 2 Parallelen geschnitten,

1. Strahlensatz:

so verhalten sich die Abschnitte auf dem einen Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.

a) $\frac{ZA}{AB} = \frac{ZA'}{A'B'}$ und **b)** $\frac{ZA}{ZB} = \frac{ZA'}{ZB'}$

Eine gute Regel zum Merken ist:

$\frac{\text{Lang}}{\text{Kurz}} = \frac{\text{Lang}}{\text{Kurz}}$

2. Strahlensatz:

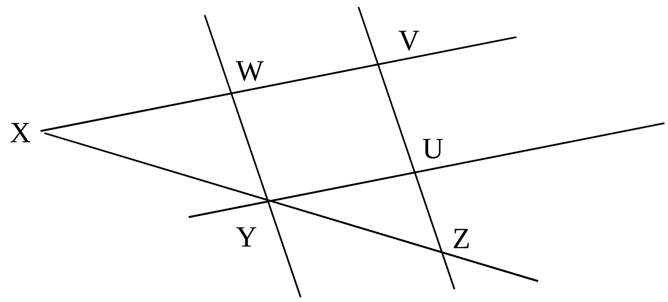
so verhalten sich die parallelen Abschnitte wie die entsprechenden Scheitelabschnitte auf dem einen Strahl (oder dem anderen Strahl).

a) $\frac{AA'}{BB'} = \frac{ZA}{ZB}$

Beim 2. Strahlensatz ist es ja fast das gleiche, aber hier werden auch die Abschnitte auf den Parallelen betrachtet... ☺

2. Aufgabe – Marvin Arbeit 1.10.2014

Sind die Verhältnisgleichungen für die Strahlensatzfigur richtig aufgestellt?



a) $\frac{YU}{XV} = \frac{ZY}{ZV}$ **b)** $\frac{WY}{VZ} = \frac{XW}{XV}$

Lösungsweg:

1. Schau dir die Figur an

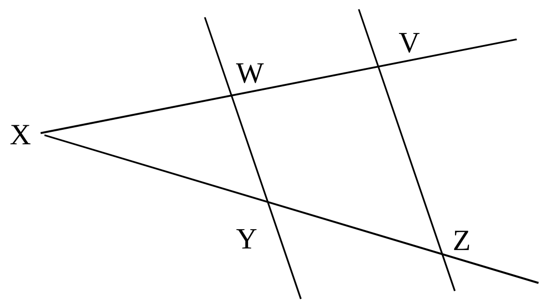
2. Zeichne die in der Gleichung angegebene Figur und lass beim Zeichnen weg, was du nicht brauchst.

3. Schau dann, ob die gegebene Gleichung dem 1. Oder 2. Strahlensatz entspricht, dazu musst du den 1. Und 2. Strahlensatz natürlich kennen

4. **Eine gute Regel zum überprüfen ist auch** $\frac{\text{Lang}}{\text{Kurz}} = \frac{\text{Lang}}{\text{Kurz}}$

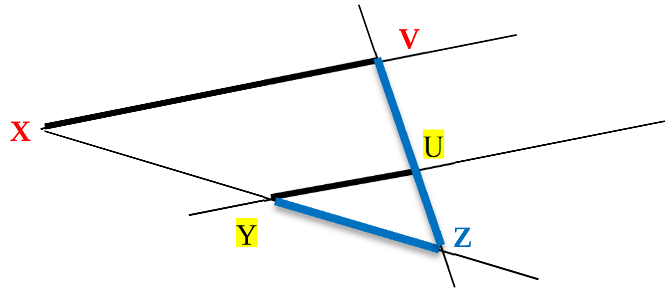
Lösung zu b) $\frac{WY}{VZ} = \frac{XW}{XV}$

Beim zeichnen habe ich die Strecke YU weggelassen, sie kommt in der Gleichung nicht vor.



b) $\frac{WY\ (kurz\ Paralle)}{VZ\ (Lang\ Parallel)} = \frac{XW\ (kurz\ Strahl)}{XV\ (Lang\ Strahl)}$ = **2. Strahlensatz – Gleichung stimmt!**

Lösung zu a) $\frac{YU}{XV} = \frac{ZY}{ZV}$

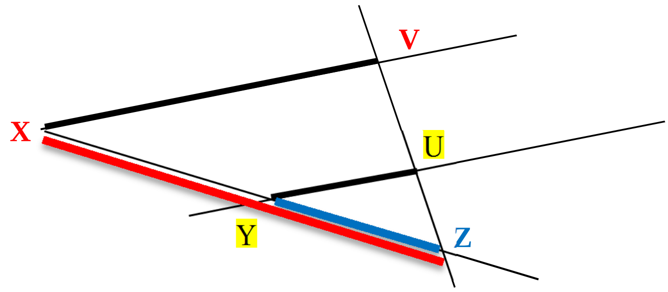


b) $\frac{YU\ (kurz\ Paralle{-}1)}{XV\ (Lang\ Parallel{-}2)} = \frac{ZY\ (kurz\ Strahl{-}1)}{ZV\ (Lang\ Strahl{-}2)}$ **Gleichung falsch!**

Es muss der kurze und der lange Abschnitt auf dem einem der beiden Strahle ins Verhältnis gesetzt werden. Hier wurde auf der rechten Seite der Gleichung der lange Abschnitt ZV von Strahl-1 ins Verhältnis gesetzt zum kurzen Abschnitt ZY des Strahl-2.

Korrektur:

b) $\frac{YU\ (kurz\ Paralle{-}1)}{XV\ (Lang\ Parallel{-}2)} = \frac{ZY\ (kurz\ Strahl{-}1)}{\boldsymbol{ZX\ (Lang\ Strahl{-}1)}} =$ **1. Strahlensatz!**



3. Aufgabe – Marvin Arbeit 1.10.2014

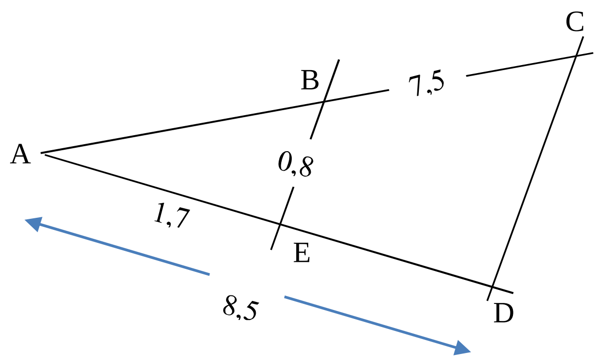
Gib bei einem fehlerhaften Verhältnis das korrigierte an.

$|AD| = 8{,}5$ cm; $|AE| = 1{,}7$ cm

$|BC| = 7{,}5$ cm; $|BE| = 0{,}8$ cm

BE || CD

Berechne $|CD|$ und $|AB|$



1. Strahlensatz:

Abschnitte auf Strahl-1 verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf Strahl-2

Der 1. StrSatz hat damit 2 Gleichungen:

1.Gl.-1.StrSatz: $\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{BC}$ und **2.Gl.-1.StrSatz:** $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC}$

Berechnung von AB

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{1{,}7}{8{,}5-1{,}7} = \frac{AB}{7{,}5} \quad | \text{ nach AB auflösen } | * 7{,}5$$

$$\left(\frac{1{,}7}{8{,}5-1{,}7}\right) * 7{,}5 \;= AB$$

$$1{,}875 \;= AB$$

Verhältniskontrolle:

Beim Einsetzen der gegebenen und der berechneten Werte in die Verhältnisgleichung muss auf beiden Seiten der Gleichung das Selbe Ergebnis heraus kommen

$$\frac{AE}{ED} = \frac{AB}{BC}$$

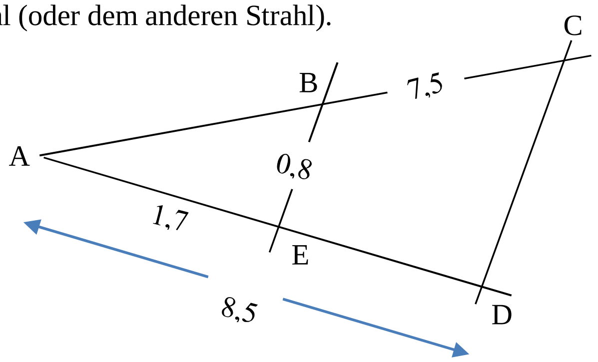
$$\frac{1{,}7}{8{,}5-1{,}7} = \frac{1{,}875}{7{,}5}$$

$$0{,}25 = \;0{,}25 \quad \textit{Das Verhältnis ist korrekt !}$$

Berechnung von CD

2. Strahlensatz:

Die parallelen Abschnitte verhalten sich wie die entsprechenden Scheitelabschnitte auf dem einen Strahl (oder dem anderen Strahl).



Hier: $\frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AD}$

Geg:

|AD| = 8,5 cm; **|AE| = 1,7 cm;** |BC| = 7,5 cm; |BE| = 0,8 cm

Diese Werte jetzt in die Gleichung einsetzen:

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AD}$$

$$\frac{0{,}8}{CD} = \frac{1{,}7}{8{,}5} \mid \text{nach CD auflösen } \mid * CD \mid : 1{,}7 \mid * 8{,}5$$

$$\frac{0{,}8 * 8{,}5}{1{,}7} = CD$$

$$4\,cm = CD$$

Verhältniskontrolle:

Beim Einsetzen der gegebenen und der berechneten Werte in die Verhältnisgleichung muss auf beiden Seiten der Gleichung das Selbe Ergebnis heraus kommen

$$\frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AD}$$

$$\frac{0{,}8}{4} = \frac{1{,}7}{8{,}5}$$

$$0{,}2 = 0{,}2 \quad \textit{Das Verhältnis ist korrekt !}$$

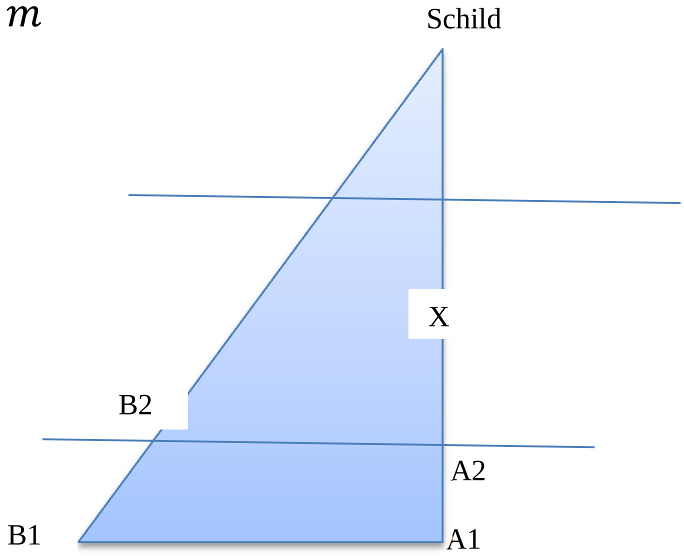
Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

4. Aufgabe – Marvin Arbeit 1.10.2014

Wie breit ist der Mittellandkanal

$$\frac{X\ (KurzStrahl-1)}{A2B2\ (KurzParallele-1)} = \frac{(X+\ A2A1\ (LangStrahl-1)}{A1B1(LangParallele-2)}$$ = 2. Strahlensatz

$$\frac{X}{16\ m} = \frac{X+10m}{19\ m} \quad |\ \text{nach X}\ |*16\ m$$



$$X = \frac{(X+10m)*16m}{19\ m}$$

$$X = \frac{16x+160m}{19\ m}$$

$$19X = 16x + 160m \quad |-16\ X$$

$$19X - 16\ X = 160m$$

$$3X = 160m \quad |:3$$

$$X = 53{,}3\ m$$

4.13 Systeme linearer Gleichungen – Gleichungssysteme

Gleichungen mit 2 Unbekannten (z.B. x + y = 2) sind nicht eindeutig lösbar.

Fügt man jedoch eine zweite Gleichung mit 2 Unbekannten (z.B. x + y = 4) hinzu, so ist im Regelfall eine Lösung möglich.

Zur Lösung können dann folgende Verfahren verwendet werden:

(1) Einsetzungsverfahren
(2) Gleichsetzungsverfahren
(3) Additionsverfahren

Beispiel:

In einer Werkstatt befinden sich Autos und Motorräder.

Insgesamt sind es 6 Fahrzeuge. Zählt man die Räder, so kommt man auf 20.

Ges.: Wie viele Autos und wie viele Motorräder befinden sich in der Werkstatt?

Lösungsweg

Du kannst solche Aufgaben meist auf mehreren Wegen lösen. In der Mathe-Klausur wirst du so fit sein, dass Du die kürzeste Lösung aufschreiben wirst. Ich werde versuchen die Aufgaben einmal als Kurzlösung und fürs Verständnis, einmal als ausführlichere Lösung anzugeben.

Ausführliche Lösung-1 „Ausprobieren“:

Versuch es dir logisch vorzustellen. Ein kleine Skizze kann hilfreich sein:

Es sind **6 Fahrzeuge**, Autos und Motorräder, die zusammen **20 Räder** haben:

Bei dieser Art von Aufgaben musst du oft noch selbst ein wenig Allgemeinwissen mitbringen. So musst du hier wissen, dass 1 Auto = 4 Räder, 1 Motorrad = 2 Räder hat. Bei ähnlichen Aufgaben musst du wissen, dass 1 Spinne = 6 Beine und 1 Käfer = 4 Beine hat.

Zeichne dir 6 Fahrzeuge auf

Überlege dann durch probieren wie vielen Fahrzeugen du 4 Räder = Auto und wie vielen Fahrzeugen du 2 Räder = Motorrad geben kannst, damit in der Summe genau 20 Räder raus kommen.

Wenn dir das gelingt, hast du eine Lösung gefunden

Fahrzeug-1	**Fahrzeug-2**	**Fahrzeug-3**	**Fahrzeug-4**	**Fahrzeug-5**	**Fahrzeug-6**

Das ist recht einfach: Gib 4 Fahrzeugen 4 Räder. Das sind 4 Autos * 4 Räder = 16 Räder

Bleiben noch 4 Räder (20 – 16 = 4) die du auf die Motorräder aufteilen kannst: Das wären dann 2 Motorräder, da diese 2 * 2 Räder = 4 Räder haben:

Fahrzeug-1	**Fahrzeug-2**	**Fahrzeug-3**	**Fahrzeug-4**	**Fahrzeug-5**	**Fahrzeug-6**
4 Räder (Auto)	4 Räder (Auto)	4 Räder (Auto)	4 Räder (Auto)	2 Räder (Motorrad)	2 Räder (Motorrad)

Antwort-1: Durch logisches probieren kommt man auf 4 Autos + 2 Motorräder

Ausführliche Lösung-2 „Zwei Gleichungen finden und ihren Schnittpunkt zeichnen/berechnen“

(1) Zunächst 2 Gleichungen I. und II. aufstellen: Hier Gl-I = Fahrzeug-Anzahl-Gleichung und Gl-II = Räder-Anzahl-Gleichung

(2) Jede Gleichung nach ein und derselben Variablen x (Auto) oder y (Motorrad) auflösen

(3) Für jede Gleichung eine Wertetabelle aufstellen, x-Werte wählen und zugehörige y ausrechnen.

(4) Mit der Wertetabelle den Graphen für Gleichung I und II in ein xy-Koordinatensystem zeichnen.

(5) Dort wo die beiden Graphen sich schneiden ist der x (Autoanzahl), y-Wert (Motorradanzahl) die Lösung

(6) Oder anders: Wo beide Wertetabellen den gleichen x und den gleichen Y-wert zeigen, liegt dir Lösung.

I.	**Auto**	**x**	4	3	2	1	0	5	**4x + 2y = 20**
	Motorrad	**y**	2	4	6	8	10	0	**Wertetab. Zu Gl. I.**

II.	**Auto**	**x**	0	3	2	4	1	5	6	**x + y = 6**
	Motorrad	**y**	6	3	4	2	5	1	0	**Wertetab. Zu Gl. II.**

Antwort: 4 Autos und 2 Motorräder stehen in der Werkstatt

++

Kurz-Lösung für Klausur

Als Variablen vereinbaren wir: **x** = Anzahl der Autoreifen und **y** = Anzahl der Motorradreifen

$I.\quad x + y \ = \ 6 \ = \ \boldsymbol{FahtzeugAnzahlGleichung}$

$II.\ 4x + 2y = 20\ Räder \ = \ \boldsymbol{RäderAnzahlGleichung}$

$I.\ x + y = 6 \ \ |\, nach\ x\ auflösen\ | - y$

$I.\quad x \quad = \ 6 - y\ \ |\, in\ II\ einsetzen$

$II.\ 4\,(6 - y) + 2y = 20 \ \ |$

$II.\ 24\ - 4y + 2y = 20 \ \ | -4y + 2y = \ -2y\ \ | \ - 24$

$II.\ \ - 2y \ = \ -4 \ \ | : \ -2$

$\boldsymbol{II.\qquad y \ = \ 2\ \ Motorräder \ \ |\, in\ Ausgangsgleichung\ I\ einsetzen}$

$I.\ x + y = 6 \ \ |\, y = 2\ einsetzen$

$I.\ x + 2 = 6 \ \ | - 2$

$\boldsymbol{I.\ x = 6 - 2 \ = 4\ Autos}$

Ähnliche Textaufgaben wie zuvor, zu Gleichungssystemen

Aufgabe

Stelle ein Gleichungssystem auf und löse es:

Bei einem Fußballspiel der Bundesliga ist der angrenzende Parkplatz mit 1.400 Fahrzeugen (Autos und Motorräder) belegt. Alle Fahrzeuge haben insgesamt 4.760 montierte Räder.

Wie viele Autos und wie viele Motorräder sind es?

Lösungsweg

Ich zeige hier zuerst die Kurzfassung der Lösung, so wie du sie am schnellsten in der Klausur machst. Danach zeige ich dann den ausführlichen Lösungsweg:

Schnell-Lösung:

2 Gleichungen aufstellen:

I. $\mathbf{A + M = 1400}$ (Fahrzeug-Anzahl-Gleichung)
II. $\mathbf{4*A + 2*M = 4760}$ (Räder-Anzahl-Gleichung)

Gl-I oder Gl-II nach A oder M auflösen:

$A + M = 1400$ | *nach A auflösen* | *- M*

$A = 1400 - M$ | *A in Gl-II einsetzen*

$4A + 2M = 4760$ | $A = 1400 - M$

$4 * (\mathbf{1400 - M}) + 2M = 4760$ |

$5600 - 4M + 2M = 4760$

$5600 - 2M = 4760$

$-2M = 4760 - 5600$ | $: -2$

M $= -840 / -2 =$ **420 Motorräder** | *M in eine Ausgangsgleichung einsetzen. Beim Einsetzen in eine Ausgangsgleichung fällt auf, wenn man falsch gerechnet hat. Daher sollte man nicht in eine Gleichung einsetzen die man aus der Ausgangsgleichung entwickelt hat.*

$A + M = 1400$ | $M = 420$

$A + 420 = 1400$ | $- 420$

A $= 1400 - 420 =$ **980 Autos**

Antwort: Auf dem Parkplatz befinden sich 980 Autos und 420 Motorräder

Ausführliche-Lösung:

a. Variablen festlegen:

„A“ wie Auto: Schreib als Variable für die gesuchte Anzahl der Autos „A“. Du könntest auch „x“ schreiben, aber „A“ zeigt dir sofort das es sich um die Autoanzahl handelt, das ist verständlicher.

„M“ wie Motorrad: Schreib als Variable für die gesuchte Anzahl der Motorräder „M“. Du könntest auch „y“ schreiben, aber „M“ zeigt dir sofort das es sich um die **M**otorradanzahl handelt, das ist verständlicher.

b. Gleichung I. und Gleichung II aufstellen:

III. **A + M = 1400** Fahrzeuge zusammen (FahrzeugGleichung)

Autos haben 4 Räder also: 4 * Anzahl **A**utos bzw.: 4A

Motorräder haben 2 Räder also: 2 * Anzahl **M**otorräder bzw.: 2M

IV. **4*A + 2*M = 4760** Räder zusammen (RäderGleichung)

c. Gleichung I. nach „A“ auflösen und „A“ in G-II einsetzen ergibt Zahlenwert M:

A + M = 1400 | - M

A = 1400 – M | **In Gl.-II einsetzen**

4*A + 2*M = 4760 | A = 1400 – M

4 * (**1400 – M**) + 2M = 4760 |

5600 – 4M + 2M = 4760

5600 - 2M = 4760

-2M = 4760 – 5600 | : -2

M = - 840 / -2 = **420 Motorräder** **|** M in eine Ausgangsgleichung einsetzen. Beim Einsetzen in eine Ausgangsgleichung fällt auf, wenn man falsch gerechnet hat. Daher sollte man nicht in eine Gleichung einsetzen die man aus der Ausgangsgleichung entwickelt hat.

A + M = 1400 | M = 420

A + 420 = 1400 | - 420

A = 1400 – 420 = **980 Autos**

4.13.1 Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

4.13.2 Aufgaben - LS8, S. 93, A1

1. Prüfe, ob das Zahlenpaar die Gleichung 3x – 8y = 5 erfüllt.

a) (x=7 | y=2)

3x – 8y = 5

3*7 – 8*2 = 5

21 - 16 = 5

5 = 5 Das Zahlenpaar (7/2) erfüllt die Gleichung !

---

b) (-3 | -2)

3x – 8y = 5

3*(-3) - 8*(-2) = 5

- 9 + 16 = 7 Das Zahlenpaar erfüllt die Gleichung **nicht**!

---

c) $\left(\frac{1}{3} \mid -\frac{1}{2}\right)$

$3*\frac{1}{3}$ - $8*\left(-\frac{1}{2}\right) =$ 5

1 + 4 = 5 Das Zahlenpaar erfüllt die Gleichung!

---

d) $x := 0$ | $y := -0.625$

$3 \cdot x - 8 \cdot y = 5$ Das Zahlenpaar erfüllt die Gleichung !

e) $x := \frac{5}{3}$ | $y := 0$

$3 \cdot x - 8 \cdot y = 5$ Das Zahlenpaar erfüllt die Gleichung !

f) $x := 12$ | $y := 4$

$3 \cdot x - 8 \cdot y = 4$ Das Zahlenpaar erfüllt die Gleichung <u>nicht</u> !

2. Gib drei Lösungen der Gleichungen an. Stelle die Lösungsmenge grafisch dar.

a) 4x + 3y = 6

4x	+	3y	=	6	|	- 4x
		3y	=	6 - 4x	|	: 3
		y	=			

4.13.3 Aufgaben - LS8, S. 99, A1-2

Bestimme die Lösung mit dem <u>**Gleichsetzungsverfahren**</u>

1a)

I y = 3 x- 6
II y = 4 x + 7

I y = 3 x- 6
II y = 4 x + 7 | I = II

I=II 3 x- 6 = 4 x + 7 | -3x | -7

-7 - 6 = 4 x – 3 x

-13 = x | in I einsetzen

I y = 3 • (-13) - 6

y = -45

L={-13 | -45}

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Bestimme die Lösung mit dem **Einsetzungsverfahren**

2a)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & y & = & 3x + 8 \\ \text{II} & x + y & = & 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & y & = & 3x + 8 & |\ \text{in II einsetzen} \\ \text{II} & x + y & = & 12 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{II} & x + 3x + 8 & = & 12 & |\ -8 \\ & 4x & = & 4 & |\ :4 \\ & \mathbf{x} & = & \mathbf{1} & |\ \text{in I einsetzen} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & y & = & 3 \bullet 1 + 8 \\ & \mathbf{y} & = & \mathbf{11} \end{array}$$

L={ 1 | 11 }

Löse rechnerisch

3a)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 3x + y & = & 19 \\ \text{II} & 10y & = & 7x + 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & 3x + y & = & 19 & |\ -3x \\ \text{II} & 10y & = & 7x + 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{I} & y & = & 19 - 3x & |\ \ y \text{ in II einsetzen} \\ \text{II} & 10y & = & 7x + 5 & \end{array}$$

II $10 \bullet (19-3x) = 7x + 5$ ***hast du an die Klammer gedacht?***

$$\begin{array}{rcll} 190 - 30x & = & 7x + 5 & |\ +30x\ |\ -5 \\ 190 - 5 & = & 7x + 30x & \\ 185 & = & 37x & \\ \mathbf{5} & = & \mathbf{x} & |\ \text{in I einsetzen} \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & y & = & 19 - 3 \bullet 5 \\ & \mathbf{y} & = & \mathbf{4} \end{array}$$

L={ 5 | 4 }

4.13.4 Additionsverfahren

4.13.4.1 Aufgaben - LS8, S. 102, A2

Löse mit dem Additionsverfahren

2e)

I: $7x + 10y = 23$

II: $2x + 5y = 23$

I: $7x + 10y = 23 \quad | \cdot(-2)$

II: $2x + 5y = 23 \quad | \cdot(7)$

I: $-14x - 20y = -46$

II: $14x + 35y = 161 \quad | \text{I+II}$

I+II: $15y = 115 \quad | :(15)$

$\mathbf{y = 7{,}66 \quad | :(15)}$

Dieses $y = 7{,}66$ in Gl. I oder Gl. II einsetzen ergibt den zugehörigen x-Wert:

I: $7x + 10y = 23 \quad | \quad y = 7{,}66$

$7x + 10 \cdot 7{,}66 = 23 \quad |$

$7x + 76{,}6 = 23 \quad | -76{,}6$

$7x = -53{,}66 \quad | :7$

$\mathbf{x = -7{,}66}$

L={-7,66 | 7,66}

4.13.4.2 Aufgaben - LS8, S. 103, A3 - Löse mit Additionsverfahren

3a)

Diese Aufgabe kannst du wie bisher nach dem Additionsverfahren lösen, oder indem Du Gleichung I sofort nach x oder y auflöst und das Ergebnis dann in Gl. II einsetzt (Einsetzverfahren) um die zweite Variable zu berechnen. Wir lösen die Aufgabe hier jetzt nach dem bekannten Additionsverfahren:

I: $y + x = 5$

II: $2y = 3x$

I: $y + x = 5 \quad | \bullet (-2)$

II: $2y = 3x \quad | -3x$

I: $-2y - 2x = -10 \quad |$

II: $2y - 3x = 0 \quad |$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

I+II:	$-\ 5x$	$=$	$-\ 10$	|	$:(-5)$
	x	**=**	**2**	|	x = 2 in Gl. I einsetzen
	$y + 2$	$=$	5	|	$-\ 2$
	y	**=**	**3**		

L = { 2 | 3 }

3b)

I: $3x + 7y = 26$

II: $5x - 6y = 8$

I:	$3x + 7y$	$=$	26	|	$\bullet\ 5$
II:	$5x - 6y$	$=$	8	|	$\bullet\ (-3)$
I:	$15x + 35y$	$=$	130	|	
II:	$-15x + 18y$	$=$	-24	|	
I+II:	$+\ 53y$	$=$	106	|	$:53$
	y	**=**	**2**	|	in Gl. I einsetzen
	$3x + 14$	$=$	5	|	$-\ 14$
	$3x$	$=$	$-\ 9$	|	$:3$
	x	**=**	**- 3**		

L={ -3 | 2 }

3c)

I: $-2x = y + 3$

II: $2y = -2x - 3$

I: $-2x = y + 3 \quad | -y$

II: $2y = -2x - 3 \quad | +2x$

I: $-2x - y = +3 \quad |$

II: $2x + 2y = -3 \quad |$

I+II: $\mathbf{y = 0} \quad |$ y = 0 in Gl. I einsetzen

$-2x = 0 + 3 \quad | : (-2)$

$x = 3 \quad | : (-2)$

$\mathbf{x = -\frac{3}{2} = -1{,}5}$

L={ -1,5 | 0 }

Maurice bitte 3d) eigenständig machen!!!!!!!!!!!!

4.13.4.3 Aufgaben - LS8-K5-Anwendungen (Textaufgaben) - S. 105, A1-5

1a)

Die Summe aus dem doppelten einer Zahl und dem Dreifachen einer anderen Zahl ist 23.

Die Summe aus dem Dreifachen der ersten Zahl und dem Doppelten der zweiten Zahl ist 34.

Wie heißen die beiden Zahlen?

I $2x + 3y = 23 \quad | \bullet (-3)$

II $3x + 2y = 34 \quad | \bullet 2$ (Additionsverfahren mit Multiplikation)

I $-6x - 9y = -69 \quad |$

II $6x + 4y = 68 \quad |$ I+II

I+II $0 - 5y = -1 \quad | \bullet (-1)$ dadurch ergeben sich positive Vorzeichen

$5y = 1 \quad | : 5$

$\mathbf{y = \frac{1}{5} = 0{,}2} \quad | \quad y = \frac{1}{5} = 0{,}2$in Gl-I einsetzen

I $2x + 3 \bullet 0{,}2 = 23$

$$2x + 0{,}6 = 23 \quad | -0{,}6$$
$$2x = 22{,}4 \quad | :2$$
$$\mathbf{x = 11{,}2}$$

L={ 11,2 | 0,2 }

1b)

Die Summe aus dem dreifachen einer Zahl und der Hälfte der anderen Zahl ist 5 und damit um 0,25 **größer** als die Hälfte der Summe der beiden Zahlen. Berechne die Zahlen.

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 3x + 0{,}5y & = & 5 & \mid \bullet (-1) \\ \text{II} & 0{,}5x + 0{,}5y & = & 4{,}75 & \mid \quad \text{(Additionsverfahren mit Multiplikation)} \\ \hline \text{I} & -3x - 0{,}5y & = & -5 & \mid \\ \text{II} & 0{,}5x + 0{,}5y & = & 4{,}75 & \mid \text{ I+II} \\ \hline \text{I+II} & -2{,}5x & = & -0{,}25 & \mid : (-2{,}5) \\ & \mathbf{x} & \mathbf{=} & \mathbf{0{,}1} & \mid \quad x = 0{,}1 \quad \text{in Gl-I einsetzen} \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} \text{I} & 3 \bullet 0{,}1 + 0{,}5y & = & 5 & \\ & 0{,}3 + 0{,}5y & = & 5 & \mid \bullet (-0{,}3) \\ & 0{,}5y & = & 4{,}7 & \mid : 0{,}5 \\ & \mathbf{y} & \mathbf{=} & \mathbf{9{,}4} & \end{array}$$

L={ 0,1 | 9,4 }

2a)

Wie lang sind der rote und der blaue Stab in Abb.1?

Rot = x

Blau = y

I $y + x = 17$

II $y - x = 7$ | + x

I $y + x = 17$

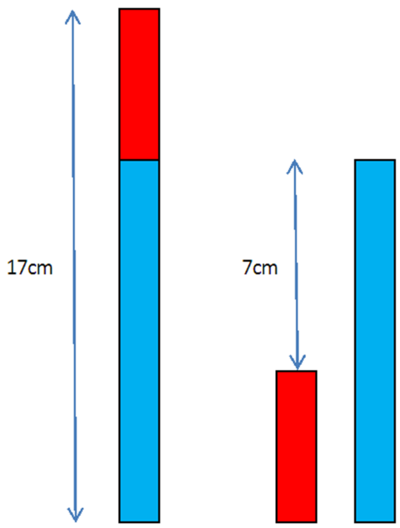
II $y = 7 + x$ | II in I einsetzen

I $7 + x + x = 17$

$7 + 2x = 17$ | - 7

$2x = 10$ | :2

$\mathbf{x = 5}$ | in Gl. I einsetzen



I $y + 5 = 17$ | - 7

$y = 17 - 5$

$\mathbf{y = 12}$

L={ 5 | 12 } - Der rote Stab ist x = 5cm lang; der blaue Stab ist y = 12 cm lang

2b)

Wie schwer sind sie jeweils? Dazu siehe Abb. 1, S. 105 in LS8

Rot = x

Blau = y

I $y + x = 220g$

II $y = x + 4g$ | Einsetzverf: II in I

I $x + 4g + x = 220g$ | - 4g

$2x = 216g$ | :2

$\mathbf{x = 108g}$ | in II einsetzen weil II schon nach y aufgelöst ist.

II $y = 108g + 4g$

$\mathbf{y = 112g}$

L={ 108 | 112 } - Der rote Stab wiegt x = 108g; der blaue Stab wiegt y = 112g.

4.13.4.4 Aufgaben - LS8-K5-Anwendungen (Textaufgaben) - S. 106, A6-12

A8

In einem Terrarium sitzen *Käfer* und *Spinnen*.
Die insgesamt 18 Tiere haben zusammen 120 *Beine*.

Wie viele Tiere sind es jeweils?

PG:

Ich habe Kinder erlebt, die an dieser Aufgabe verzweifelt sind. Das lag daran, dass die Autoren dieser Aufgabe voraussetzen, dass jedes Kind natürlich (in der Aufregung einer Klausur) weiß wie viele Beine eine Spinne und wie viele Beine ein Käfer hat.

Die verzweifelten Kinder wussten zwar die Beinanzahl von Käfer und Spinne, waren aber der festen Meinung, dass man die Aufgabe auch ohne dieses Wissen lösen kann, weil in der Aufgabenstellung keine Rede davon ist, dass man die Beinanzahl von Spinne und Käfer wissen oder recherchieren soll.

Andere Kinder sagten zurecht: Wozu gehört ein 1000-Füßler und haben alle Spinnen und Käferarten immer die gleiche Beinanzahl oder gibt es Ausnahmen??

Also, an die Aufgabenerfinder: Kinder stellen mehr Fragen als wir Erwachsene und daran muss man bei der „Aufgabenerfindung“ bitte, bitte denken. Es geht darum mit Spaß und Erfolgserlebnissen weiter Neugier am Lernstoff zu wecken und/oder zu erhalten.

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Lösungsweg:

Zunächst einmal ist festzulegen, welche Variable für welche Tierart steht.

x : Anzahl der Käfer	(ein Käfer hat „in der Regel“:	6 Beine)
y : Anzahl der Spinnen	(eine Spinne hat „in der Regel“:	8 Beine)

a) EINSETZUNGSVERFAHREN

Lösung der Aufgabe mit dem Einsetzungsverfahren.

Bei dem Einsetzungsverfahren wird die Gleichung zunächst nach einer Variablen umgestellt. Dabei ist es dem Schüler überlassen, welche der gegebenen Gleichungen er für die Umwandlung verwenden möchte und nach welcher Variablen er umformt.

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Käfer : X
Spinnen : y

I $\quad x + y = 18$ (Tieranzahl- Gleichung)
II $6x + 8y = 120$ (Beine-Anzahl-Gleichung)

Einsetzungsverfahren:

I $\quad x + y = 18 \;/ - y$

$x = 18 - y$

ingesetzt in II :

$6(18 - y) + 8y = 120$

$108 - 6y + 8y = 120 \;/ - 108$

$2y = 12 \;/ : 2$

$y = 6$

In I : $x + 6 = 18 \;/ - 6$

$x = 12$

b) GLEICHSETZUNGSVERFAHREN
Käfer & Spinnen im Terrarium

Lösung der Aufgabe mit dem Gleichsetzungsverfahren.

Bei dem Gleichsetzungsverfahren müssen beide Gleichungen zunächst so umgeformt werden, dass auf der linken Seite Gleichheit herrscht. Durch diesen Trick wird eine Variable geschickt entfernt. Erst dann kann gleich gesetzt werden.

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Gleichsetzungsverfahren :

$$\text{I} \quad x + y = 18 \;/\; \cdot 6 \quad \text{(Tieranzahl- Gleichung)}$$
$$\text{II} \quad 6x + 8y = 120 \quad \text{(Beine-Anzahl-Gleichung)}$$

$$6x + 6y = 108 \;/\; -6y$$
$$6x + 8y = 120 \;/\; -8y$$

Gleichheit muss gegeben sein !!

$$6x = 108 - 6y$$
$$6x = 120 - 8y$$

Variable gleich ✓
Faktor gleich ✓

→ Jetzt erst gleich setzen !!

$$108 - 6y = 120 - 8y \;/\; -108$$
$$-6y = 12 - 8y \;/\; +8y$$
$$2y = 12 \;/\; :2$$
$$\underline{\underline{y = 6}}$$

www.schule-studium.de

$$\text{In I}: \; x + 6 = 18 \;/\; -6$$
$$x = 12$$

c) ADDITIONSVERFAHREN

Käfer & Spinnen im Terrarium

<u>Lösung der Aufgabe mit dem ADDITIONSVERFAHREN</u>

Bei dem Additionsverfahren müssen die beiden Ausgangsgleichungen zunächst so umgefort werden, dass eine Variabel wegfällt. Da es sich im 2. Schritt um eine Addition handelt, muss der Faktor der wegfallenden Variabel im Betrag identisch und in der einen Gleichung positiv, in der anderen Gleichung negativ sein.

Additionsverfahren :

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & x + y & = & 18 \;/\cdot(-6) \\ \text{II} & 6x + 8y & = & 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \boxed{-6x} - 6y & = & -108 \;/ -6y \\ \boxed{6x} + 8y & = & 120 \;/ -8y \\ \hline 2y & = & 12 \;/ : 2 \\ y & = & 6 \end{array}$$

Die Variabel x soll hier wegfallen !!

In I : $x + 6 = 18 \;/ -6$

$x = 12$

www.schule-studium.de

Antwort:
In dem Terrarium befinden sich 12 Käfer und 6 Spinnen.

Aufgabe

Ein Vertreter verkauft zwei Modelle. Modell A kostet 28 € und Modell B kostet 9 €.

Insgesamt hat er 125 Modelle verkauft und 2398 € eingenommen.

Wie viele Modelle jeder Sorte hat er verkauft, wenn er vom Modell A genau 9 Stück mehr verkauft hat?

Ein Modell A kostet 28 €

Ein Modell B kostet 9 €

Also:

1A = 28 €

1B = 9 €

Er verkauft eine Anzahl **„x“** von Modell A für je 28 €

Und

Er verkauft eine Anzahl **„y“** von Modell B für je 9 €

Und bekommt dafür insgesamt 2398 €

Wir können also schreiben

x * 28 € + y * 9 € = 2398 €

oder einfacher

28x + 9y = 2398 €

Hier haben wir jetzt eine Gleichung mit 2 Unbekannten. Wir können aber nur Gleichungen mit einer Unbekannten lösen.

Also versuchen wir in dieser Gleichung die Unbekannte x durch y zu ersetzen oder y durch x zu ersetzen. Dazu können wir auf etwas zurückgreifen was im Aufgabentext gesagt wird:

Dort heißt es: ***„Die Anzahl x die er von Modell A verkauft ist um 9 mehr/größer als die Anzahl y die er von Modell B verkauft.“***

Also können wir für die Anzahl x auch schreiben:

x = y+9

und setzen (y+9) für x ein:

28x + 9y = 2398 €

28 (y+9) + 9y = 2398 €

damit haben wir jetzt nur noch eine Unbekannte, nämlich die Anzahl y der verkauften B-Modelle, nach wir die Gleichung nun auflösen/umstellen:

1. Klammer ausmultiplizieren:

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

28y + 9*28 + 9y = 2398 €

28y + 252 + 9y = 2398 € Die y der linken Seite zusammenfassen

37y + 252 = 2398 € jetzt - 252

37y = 2398 - 252

37y = 2146 € jetzt : 37

y = 58 B-Modelle

Anzahl x der A-Modelle berechnen indem wir wir y = 58 in die Ausgangsgleichung einsetzen

x*28 € + y*9 € = 2398 €

x*28 € + 58*9 € = 2398 €

28x + 522 € = 2398 €

28x = 2398 € - 522 €

28x = 1876 € jetzt : 28

x = 67 A-Modelle

Probe:

x*28 € + y*9 € = 2398 €

67*28 € + 58*9 € = 2398 €

1876 € + 522 € = 2398 €

2398 € = 2398 € Gleichung erfüllt damit Rechnung richtig !

4.14 Zusammenfassung: Verfahren zum Lösen eines Gleichungssystems

Du hast verschiedene Verfahren zum Lösen von Gleichungen kennengelernt.

In der Tabelle sind sie noch einmal zusammengefasst.

Überlege dir zu jedem Lösungsverfahren ein Beispiel, das sich mit diesem Verfahren am geschickteste lösen lässt. Begründe außerdem, warum sich das jeweilige Verfahren eignet, um das Beispiel zu lösen.

Lösungsverfahren	Beispiel	Begründung
Gleichsetzungsverfahren	**I 3x+40=y** **II y =12-5x | I=II setzen** I=II : 3x+40 = 12-5x	Gleichsetzungsverfahren: weil man beide Gleichungen gleichsetzen kann, sie sind schon nach y umgeformt
Einsetzungsverfahren	**I 4x-7y = 28** **II 2x-12 = 2y | : 2** I 4x-7y = 28 II x = 6y | x=6y in Gl. I einsetzen	Einsetzungsverfahren: weil man die II Gleichung nur noch durch 2 dividieren muss
Additionsverfahren	**I 6x+11y = 31** **II -6x - 7y = 12 | I+II** I 6x+11y = 31 II -6x - 7y = 12 | I+II	Additionsverfahren: weil man die I+II Gleichung nur addieren muss, da die Koeffizienten von x gleich groß und mit entgegengesetztem Vorzeichen sind.
Additionsverfahren (mit Multiplikation)	**I 4x-9y=3 | •2** **II -8x-4y=12** I 8x-18y=6 II -8x-4y=12	Additionsverfahren: weil man die I Gleichung nur noch mit 2 multiplizieren muss.

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

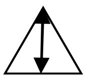
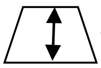
4.15 AbschlussÜbungen vor der Arbeit für Maurice M. – 8. Kl.

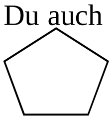
4.15.1 Prisma und Zylinder, lineare Gleichungen und Gleichungssysteme

Lerne die Eigenschaften von Prima und Zylinder auswendig. Kontrolliere dich indem du das gelernte ohne nachschlagen aufschreibst. Wiederhole es damit du sicher wirst:

Zylinder	**(3)** Körper, zwei kongruenten **Kreisen** als Grundfläche oben und unten **(4)** Seine Mantelfläche ist ein Rechteck
Prisma	**(1)** Zwei zueinander parallele, kongruente **Vielecke** als Grundfläche oben und unten **(2)** Seitenflächen sind Rechtecke deren Seitenkanten parallel und gleich lang sind

Lerne die drei wichtigsten Berechnungsformeln für Prima und Zylinder auswendig. Kontrolliere dich indem du das gelernte ohne nachschlagen aufschreibst. Wiederhole es damit du sicher wirst:

Zylinder	$V = \pi \; r^2 \; h$ | $M = 2 \; \pi \; r \; h$ | $O = 2 \; \pi \; r\,(r + h)$ *Wir schreiben beim ZylinderVolumen **nicht** V = G • h, wie beim Prisma, sondern setzen für G immer gleich* $\pi \; r^2$ *ein weil es beim Zylinder nur eine einzige Form der Grundfläche G gibt, nämlich immer nur den Kreis und dessen Fläche ist G =* $\pi \; r^2$. *Beim Prisma dagegen schreiben wir schreiben wir V = G • h weil die Grundfläche nicht immer gleich ist und daher verschiedene Formeln für ihr Berechnung angewendet werden müssen.* *Damit du bei der V-Berechnung nicht wieder das Quadrat über das "π" setzt, statt über das „r“, hilft die vielleicht diese Eselsbrücke den Fehler zu vermeiden:* ***Merke**: Quadrat über Pi Nie !*
Prisma	$V = G \; h$ | $M = U \; h$ | $O = 2 \; G + M$ Wichtig ist, dass die Grundfläche verschiedene Vieleckige Formen haben kann und deshalb musst du die Flächenberechnungsformeln der Wichtigsten Vielecke kennen. Hier sind sie: $G = a \bullet b$ | Für Quader  $G = \frac{a \;\; h}{2}$ | Für Dreieck  h $G = \frac{a + c}{2} \;\; h$ | Für Trapez  h

Mit diesen drei wichtigen Grundflächen kannst Du auch andere Formen berechnen indem du Sie in Dreieck, Rechteck und Trapez aufteilst. Dieses Fünfeck  kannst du z.B. in ein Trapez und in ein Dreiseck aufteieln.

Kann Du den Umfang all diese Formen berechnen ?

Wichtig !: Volumenberechnung in Liter :

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Wenn Du berechnen sollst, wieviel Liter in prisma- oder Zylinderförmiges Gefäß passen, dann rechne die Gefäßabmessungen vor der Volumenberechnung schon im Dezimeter „dm“, dann ist das Ergebnis der späteren Volumenberechnung nämlich schon Liter und muss nicht mehr umgerechnet werden.

Zum umrechnen der Gefäßlängen und Breiten:

1 dm = 10 cm

Also: 1m = 10 dm = 100 cm

Beispiele: 25 cm = 25/10 dm = 2,5 dm

Wenn Du nicht gleich in dm-Längen rechnest, dann musst du später das Ergebnis in dm^3 umrechnen, die dann gleichzeitig die Litermenge sind.

Hast das Volumen mit cm gerechnet, dann bekommst Du cm^3 als Ergebnis.

Um daraus dm^3 zu machen gilt:

$1m^3 = 1000\ dm^3 = 1000.000\ cm^3 = 1000.000.000\ mm^3$

Du siehst, um von **cm³** auf **dm³** zu kommen, musst du eine Einheit nach links gehen und dabei das Komma um drei Nullen nach links verschieben. Also nichts anderes als die cm^3 durch 1000 teilen.

Genauso geht das wenn du cm^3 in m^3 oder auf mm^3 umrechnen sollst:

Wenn zwischen den beiden Einheiten 1 Gleichheitszeichen liegt dann musst durch 1000 teilen wenn es zur nächst größeren Einheit geht und mit 1000 multiplizieren, wenn es in die nächst kleiner Einheit umgerechnet werden soll.

5 RECHNEN MIT QUADRATWURZELN (RADIZIEREN)

5.1 Wurzelgesetze

Gesetze | **Beispiele**

$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a*b}$ | $\sqrt[4]{8} * \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8*2} = \sqrt[4]{16} = 2$

$\sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$ | $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{4}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m*n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ | $\sqrt[2]{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[3]{9}$

$\sqrt[n]{a^n*b} = a*\sqrt[n]{b}$ | $\sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{64*5} = 4*\sqrt[3]{5}$

5.1.1.1 Aufgaben - LS8-K5-- S. 136, A1 - Maurice 12.03.11

A1c: $\sqrt{10000} = \sqrt{10^2 \cdot 10^2} = 10 \cdot 10 = 100$

A1d: $\sqrt{10^5} = \sqrt{10^2 \cdot 10^2 \cdot 10} = 100 \cdot \sqrt{10}$

A2d: $\sqrt{52} : \sqrt{0{,}13} = \sqrt{\frac{52}{0{,}13}} = \sqrt{400} = 20$

A2e: $\sqrt{8\,a^2 + a^2} = \sqrt{a^2\,(8+1)} = \sqrt{a^2 \cdot 9} = |\,a\,| \cdot 3$

A2f: $\sqrt{10\;b^2 - b^2} = \sqrt{b^2\,(10-1)} = \sqrt{b^2 \cdot 9} = |\,b\,| \cdot 3$

A2g: $\sqrt{100\,x^2 + 21x^2} = \sqrt{(100+21)\cdot x^2} = \sqrt{121 \cdot x^2} = 11 \cdot |\,x\,|$

A2h: $\sqrt{168\,x^2 + 156\,x^2} = \sqrt{(168+156)\cdot x^2} = \sqrt{324 \cdot x^2} = 18 \cdot |\,x\,|$

5.1.1.2 Aufgaben - Realsch-K9- S. 64, A8 - Marvin 2015

Vereinfache:

A8a: $\sqrt{\boldsymbol{2z}} * \frac{\sqrt{\boldsymbol{56z}}}{\sqrt{\boldsymbol{7}}} \qquad | \quad \frac{\sqrt{56z}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{56z}{7}} = \sqrt{9z}$

$\sqrt{\boldsymbol{2z}} * \sqrt{9z}$

$\sqrt{\boldsymbol{2z * 9z}} = \sqrt{18z^2} = 4z$

6 QUADRATISCHE FUNKTIONEN – PARABEL – KLASSE 9 - GYM

6.1 Quadratische Ergänzung

[LS8Softw]

Funktionen mit der Normalform

$$\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$$

lassen sich mit **quadratischer Ergänzung** auf **Scheitelform** bringen, so dass der Scheitel der zugehörigen Parabel direkt abgelesen werden.

Lautet die Normalform z.B.

$$\mathbf{y = x^2 + 6x + 5}$$

so lässt sich auf der rechten Seite ein quadriertes Binom erzeugen, indem man die **Hälfte der Zahl, die bei x steht** (hier also 6/2 bzw. 3) zum Quadrat nimmt (hier also $(6/2)^2$ bzw. $3^2 = 9$ und dieses Quadrat dann in der Gleichung ergänzt:

$y = x^2 + 6x + 5$ | ergänze mit $(6/2)^2 = 3^2 = 9$

$y = \underbrace{x^2 + 6x \mathbf{+ 9}}_{\textbf{1. Binom}} + 5 \mathbf{- 9}$ | Mit dieser Ergänzung sind die drei ersten Summanden das 1. Binom: $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$

$\overbrace{\mathbf{a^2 + 2*a*b + b^2}}^{\textbf{1. Binom}} = \mathbf{(a + b)^2}$ | wir können diese drei Summanden also wie folgt schreiben

$x^2 + 2*x*3 + 3^2 = \mathbf{(x + 3)^2}$ | ersetze $x^2 + 6x + 9$ durch das **Ergebnis des 1.Binoms** $\mathbf{(x+3)^2}$

$y = \mathbf{x}^2 \mathbf{+} 6x \mathbf{+ 9} + 5 \mathbf{- 9}$ | für $x^2 + 6x + 9^2$ setzen wir $(x+3)^2$ ein.

Merke: Die Hälfte der Zahl die bei x steht, hier 6/2 = 3

$y = \mathbf{(x + 3)^2} + 5 \mathbf{- 9}$ | $+5 - 9 = \mathbf{-4}$

Das ist dann die von uns gesuchte Scheitelform zu der Normalform einer quadratischen Gleichung

$y = \mathbf{(x + 3)^2 - 4}$ | $+5 - 9 = -4$

Also hat die zugehörige Parabel den Scheitel:

$y = (x \mathbf{+ 3})^2 \mathbf{- 4}$ | **Wichtig:** beim Scheitelpunkt S (x | y) ändert sich das Vorzeichen des x-Wertes gegenüber dem Vorzeichen in der SF-Gleichung
Beim y-Wert bleibt das Vorzeichen wie in der SF.

S (- 3 | - 4)

Weitere Zusatz-Erklärung zum Verständnis

Wer sich damit sicherer fühlt, kann die Scheitelform auch durch Nullsetzen der quadratisch ergänzten Gleichung bestimmen:

$x^2 + 6x + \mathbf{3^2} + 5 - \mathbf{3^2} = \mathbf{0}$

$(x + \mathbf{3})^2 = \mathbf{-5 + 3^2}$

$(x + \mathbf{3})^2 = \mathbf{-5 + 9}$

$(x + \mathbf{3})^2 = \mathbf{4}$

$\mathbf{(x + 3)^2 - 4} = \mathbf{0}$

6.1.1.1 BeispAufgabe – Kusch-B1-S. 312

$x^2 + 8x + 7 = 0$ | Mit der **quadr. Ergänzung** ein vollständiges Quadrat herstellen

$x^2 + 8x = -7$ | das Glied ohne x (hier 7) auf die rechte Seite

$\overbrace{x^2 + 8x + \mathbf{4^2}}^{\textbf{1. Binom}} = -7 + \mathbf{4^2}$ | Die **quadErg** ist **positiv** und **gleich** dem **halben Faktor** von **x zum Quadrat.** Hier $(8/2)^2 = 4^2$. Die **quadErg** wird auf beiden Seiten Addiert oder auf einer Seite addiert und sofort wieder subtrahiert. So entsteht das **1. Binom $a^2 + 2ab + b^2$** oder das **2. Binom $a^2 + 2ab + b^2$**

$(x + \mathbf{4})^2 = -7 + \mathbf{16}$ | ersetze $x^2 + 8x + \mathbf{4^2}$ durch das **Ergebnis des 1.Binoms $(x+4)^2$**
Also das vollständige Quadrat in Klammer umformen und rechte Seite

$(x + 4)^2 = 9$ | vereinfachen.

$\sqrt{(x+4)^2} = \sqrt{9}$ | beide Seiten radizieren oder wie wir im sagen: „VerWurzeln“ ☺

$|x + 4| = 3$ | Wegen $|x + 4| = 3$ erhält man zwei Ergebnisse (s.a.KUSCH-B1-9.1).

$x + 4 = 3$ oder $-(x + 4) = 3$

Ergebnisse:

$x_1 = -1$ und $x_2 = -7$ Die Probe liefert den Beweis, dass die Ergebnisse richtig sind:

Probe:	
X_1: $(-1)^2 + 8 * (-1) + 7 = 0$	**X_2:** $(-7)^2 + 8 * (-1) + 7 = 0$
$+1 + 8 - 7 = 0$	$+49 - 56 + 7 = 0$
$\underline{\underline{0 = 0}}$	$\underline{\underline{0 = 0}}$

6.2 QuadrFunkt.: NormalForm, ScheitelForm, ScheitelPunk S (x | y)

<table>
<tr><td colspan="4" align="center"><u>Ablaufplan von der Normalform zur Scheitelform zum Scheitelpunkt</u>
<u>1. Kontrolle:</u> Haben wir die Normalform der quadr. Gleichung y = ax² + bx + c ?</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Ja
Ist der Faktor „a“ der bei x² steht = „1“ ?</td><td colspan="2" align="center">Nein</td></tr>
<tr><td>Ja
1. QE: + (b/2)² – (b/2)²
→ Binom entsteht
2. Binom-Ergebnis
[x ± (b/2)]² ± c – (b/2)²</td><td>Nein
1. „a“ ausklammern
a [x² ± (b/a) x ± (c/a)]
→ NF = Wert in der […]
2. weiter wie bei „ja“</td><td></td><td></td></tr>
</table>

6.2.1.1 Bestimme die Scheitelform und daraus den Scheitelpunkt S (x | y)

Die nachfolgende Tabelle enthält die Normalform und zu deiner Kontrolle die zugehörige Scheitelform und den Scheitelpunkt die du zu der jeweiligen Normalform durch Anwenden der „Quadratischen Ergänzung“ bestimmen sollst *[LS8Softw]:*

Aufgabe Nr.	**NormalForm NF** Einer quadratischen Funktion	Zur NF gehörige **ScheitelForm SF**	Aus der SF ablesbarer SP **ScheitelPunkt SP**
1.	$y = x^2 + 2x - 5$	$y = (x+1)^2 - 6$	S (-1 | -6)
2.	$y = x^2 - x + 4$	$y = (x+0,5)^2 + 3,75$	S (– 0,5 | + 3,75)
3.	$y = 3x^2 + 6x + 9$	$y = 3\,(x+1)^2 + 6$	S (-1 | + 6)
4.	$y = x^2 + 6x + 9$	$y = (x+3)^2 + 0$	S (-3 | 0)

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

1. Aufgabe

$y = ax^2 + bx + c$ | Die allgemeine Normalform der quadratischen Funktion

$y = 1x^2 + 2x - 5$ = Normalform NF

$y = 1x^2 + 2x - 5$ | Quadratische Ergänzung mit $(2/2)^2 = 1$

$y = \underbrace{1x^2 + 2x + 1}_{\text{1. Binom}} - 5 - 1$ | 1. Binom: $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

| für $1x^2 + 2x + 1$ setzen wir $(x+1)^2$

Merke: Die Hälfte der Zahl die bei x steht, hier 2/2 = 1

$y = (x + 1)^2 - 5 - 1$ | $-5 - 1 = -6$

$y = (x + 1)^2 - 6$ = ScheitelForm SF

| **Wichtig:** beim Scheitelpunkt S (x | y) ändert sich das Vorzeichen des x-Wertes gegenüber dem Vorzeichen in der SF-Gleichung

Beim y-Wert bleibt das Vorzeichen wie in der SF.

S (- 1 | - 6) = ScheitelPunkt SP

2. Aufgabe

$y = ax^2 + bx + c$ | Die allgemeine Normalform der quadratischen Funktion

$y = x^2 - x + 4$ = NormalForm NF

$y = 1x^2 + \mathbf{1}x + 4$ | Quadratische Ergänzung mit $(\mathbf{1}/2)^2 = (0,5)^2 = 0,25$

$y = \underbrace{1\mathbf{x}^2 + 1x + \mathbf{0,25}}_{\text{1. Binom}} + 4 - \mathbf{0,25}$ | 1. Binom: $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$

| für $1x^2 + 1x + 0,25$ setzen wir $(x+1)^2$

Merke: Die Hälfte der Zahl die bei x steht, hier 2/2 = 1

$y = (x + 0,5)^2 + 4 - \mathbf{0,25}$ | $4 - 0,25 = \mathbf{3,75}$

$y = (x + 0,5)^2 + 3,75$ = ScheitelForm SF

| **Wichtig:** beim Scheitelpunkt S (x | y) ändert sich das Vorzeichen des x-Wertes gegenüber dem Vorzeichen in der SF-Gleichung

Beim y-Wert bleibt das Vorzeichen wie in der SF.

S (- 0,5 | + 3,75) = ScheitelPunkt SP

3. Aufgabe

$y = ax^2 + bx + c$ | Die allgemeine Normalform der quadratischen Funktion

$y = 3x^2 + 6x + 9$ = Normalform

Achtung: Hier ist der Faktor „a" von x^2 **nicht** 1, sondern 3. Wenn der Faktor von x^2 **nicht** 1 ist, dann muss der Faktor ausgeklammert werden:

$y = 3x^2 + 6x + 9$ | 3 (….)

$y = 3\ (x^2 + 2x + 3)$ | **QErg** $(2/2)^2 = (1)^2 = 1$

$y = 3(\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{\text{1. Binom}} + 3 - 1)$ | 1. Binom: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

| für $1x^2 + 2x + 1$ setzen wir $(x+1)^2$

Merke: Die Hälfte der Zahl die bei x steht, hier 2/2 = 1

$y = 3\,((x + 1)^2 + 3 - 1)$ | 1. Binom: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$y = 3\,(x + 1)^2 + 9 - 3$ | $+9 - 3 = 6$

$y = 3\,(x + 1)^2 + 6$ = SF

| **Wichtig:** beim Scheitelpunkt S (x | y) ändert sich das Vorzeichen des x-Wertes gegenüber dem Vorzeichen in der SF-Gleichung

Beim y-Wert bleibt das Vorzeichen wie in der SF.

S (- 1 | + 6) = Scheitelpunkt

4. Aufgabe

$y = ax^2 + bx + c$ | Die allgemeine Normalform der quadratischen Funktion

$$\boxed{y = x^2 + 6x + 9 = \text{Normalform}}$$

$y = x^2 + 6x + 9$ | **QErg:** $(6/2)^2 = (3)^2 = 9$

$y = (\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\text{1. Binom}} + 9 - 9)$ | 1. Binom: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

| für $1x^2 + 6x + 9$ setzen wir $(x+3)^2$

Merke: Die Hälfte der Zahl die bei x steht, hier 2/2 = 1

$y = (x + 3)^2 + 9 - 9$ | $+9 - 9 = 0$

$$\boxed{y = (x + 3)^2 + 0 = \text{SF}}$$

| **Wichtig:** beim Scheitelpunkt S (x | y) ändert sich das Vorzeichen des x-Wertes gegenüber dem Vorzeichen in der SF-Gleichung

Beim y-Wert bleibt das Vorzeichen wie in der SF.

$$\boxed{S(-3 \mid 0) = \text{Scheitelpunkt}}$$

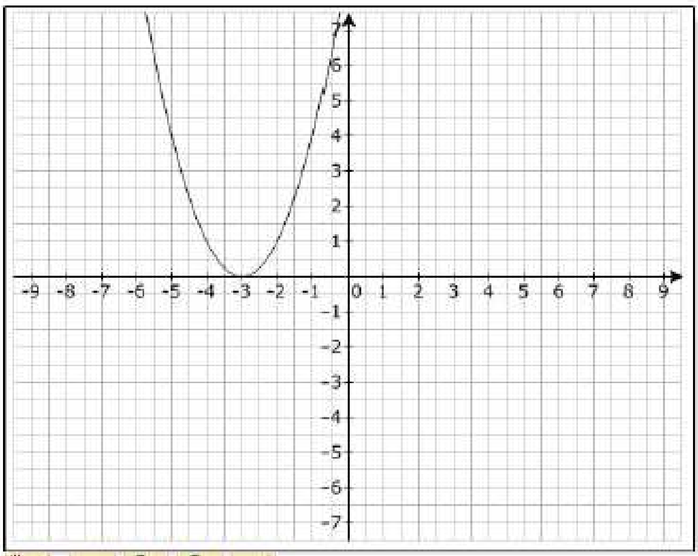


Abb. 1: $y = (x + 3)^2 + 0 = \text{SF}$

12. Aufgabe – LS-S.36:

Sarah liest in einer Broschüre:

„Der Triumphbogen hat eine **Höhe von 7m** und ist **parabelförmig** gebaut worden.“

Sarah bezweifelt, dass der Bogen parabelförmig ist und misst zur Kontrolle 3 Punkte P (x |y) des Bogens:

P1 (0| 0); P2 (1| 2,2); P3 (11| 0)

Führe mit Hilfe von Sarahs Messdaten die Kontrolle durch ob der Bogen parabelförmig ist oder nicht.

Lösungsweg

1. Mit gemessenen Punkten Funktionsgleichung für die Triumphbogen-Parabel bestimmen
2. Scheitelpunkt der Parabel bestimmen

Aus den Punkten P1, P2, P3 ergeben sich mit

$y = ax^2 + bx + c \quad |$

die Gleichungen

$0 = a*0^2 + b*0 + c \quad |$ also c = 0

Und

$2{,}2 = a*1^2 + b*1 + 0 \quad |$

Sowie

$0 = a*11^2 + b*11 + 0 \quad |$

Beim Lösen des linearen Gleichungssystems ergeben sich

$a = -0{,}22$ und $b = 2{,}42$

Also ist

$y = -$

7 ZINS – RENTE - LOGARITMEN – KL10 - GYM

1. Aufgabe ARS-Kl-10-BeruflGymn-Maurice

Lösen Sie mit Hilfe einer Gleichung:

a) Ein Kapital K wird jährlich mit 5% verzinst. Nach wie viel Jahren hat sich das Kapital mit Zinsen und Zinseszinsen verdoppelt (verfünffacht)?

b) Ein Kapital von 7000 € wird jährlich mit 5,5 % verzinst. Nach wie viel Jahren ist das Kapital mit Zinsen und Zinseszinsen auf ungefähr 12000 € gewachsen?

Lösungsweg zu 1a

Zinsformel: $K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

Wird ein Kapital **K_0** mit einem gleichbleibenden Zinssatz von **p%** über **n** Jahre verzinst, so errechnet sich das das Kapital **K_n** nach **n** Jahren wie folgt:

n =	1	2	3	n
K_n =	$K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^1$	$K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^2$	$K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^3$	$K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

Für die Aufgabe 1a bedeutet das:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

P = 5%;

K_0 = ? soll sich nach n Jahren auf K_n verdoppelt haben, also:

$$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

$K_n = 2 \bullet K_0$

Den Faktor $\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ aus der Zinsformel kann man ausrechen:

$$\left(1+\frac{5}{100}\right)^n = (1,05)^n$$

$$2 \cdot K_0 = K_0 \cdot (1,05)^n$$

$$2 \cdot \cancel{K_0} = \cancel{K_0} \cdot (1,05)^n$$

: K_0 indem man beide Seiten der Gleichung durch K_0 teilt, kürzt sich K_0 weg.

$$2 = (1,05)^n$$

Das entspricht dann:

$$b = a^x$$

Nun muss man die Gleichung nach der gesuchten Anzahl der Jahre n auflösen. Weil n ein Exponent ist, muss man durch logarithmieren (s. Logarithmusgesetze) nach n auflösen.

Und x bzw. n kann man nun mit folgendem Logarithmengesetz ausrechen:

$$x = \log_a b$$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

$$n \quad = \quad log_{1,05}\,(2)$$

Um nun die Jahre „n" auszurechen musst du je nach Taschenrechnertyp folgendes eintippen:

$$n \;=\; \frac{lg\,2}{lg\,1,05} \;\; oder \;\; \frac{log\,2}{log\,1,05} \;\; oder \;\; \frac{ln\,2}{ln\,1,05} = \quad 14,207\,Jahre$$

<u>Antwort:</u>

Das AnfangsKapital $\mathbf{K_0}$ verdoppelt sich auf $\mathbf{K_n}$ bei einem Zinssatz von **p% = 5 %** in rd. **n = 14.21 Jahre**

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Aufgabe 1b

Ein Kapital von 7000 € wird jährlich mit 5,5 % verzinst. Nach wie viel Jahren ist das Kapital mit Zinsen und Zinseszinsen auf ungefähr 12000 € gewachsen?

Lösungsweg

Im Vergleich zu Aufgabe 1a ist hier der Faktor nicht 2 sondern eben 12/7 ansonsten wie 1a

Zinsformel: $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Wird ein Kapital **K_0** mit einem gleichbleibenden Zinssatz von **p%** über **n** Jahre verzinst, so errechnet sich das das Kapital **K_n** nach **n** Jahren wie folgt:

n =	1	2	3	N
K_n =	$K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^1$	$K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$	$K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$	$K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Für die Aufgabe 1b bedeutet das:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Zinsformel

Geg.: P = 5,5%; K_0 = 7000 €; K_n = 12000 €

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Den Faktor $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ aus der Zinsformel kann man ausrechen:

$$\left(1 + \frac{5,5}{100}\right)^n = (1,055)^n$$

$$12000 = 7000 \cdot (1,055)^n$$

: 7000

$$\frac{12000}{7000} = (1,055)^n$$

$$\frac{12}{7} = (1,055)^n$$

Nun muss man die Gleichung nach der gesuchten Anzahl der Jahre n auflösen. Weil n ein Exponent ist, muss man durch logarithmieren Das Logarithmengesetz dazu lautet:

$b = a^x$ Und x bzw. n kann man nun mit folgendem Logarithmengesetz ausrechen: $x = \log_a b$

$$n = \log_{1,055}\left(\frac{12}{7}\right)$$

Um nun die Jahre „n“ auszurechen musst du je nach Taschenrechner folgendes eintippen:

$$n = \frac{lg\left(\frac{12}{7}\right)}{lg\ 1,055} \ oder \ \frac{log\left(\frac{12}{7}\right)}{log\ 1,055} \ oder \ \frac{ln\left(\frac{12}{7}\right)}{ln\ 1,055} = 10,07\ Jahre$$

Antwort:

Das AnfangsKapital **K_0** = 7000€ wächst bei einem Zinssatz von **p% = 5,5 %** in rd. **n = 10,6 Jahre** auf ein Endkapital **K_n** rd. 12000€

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

2. Aufgabe ARS-Kl-10-BeruflGymn-Maurice

Die Intensität weicher Röntgenstrahlung nimmt beim Durchdringen von Aluminiumplatten von 1mm Stärke um 75% ab.Wie viele 1mm starke Platten werden benötigt, um nur noch 1% der Strahlung durchzulassen?

Kurzfassung der Lösungsweg

Geg.: 100%-igen Ausgangsstrahlung „S_0“ geht zu 25% (0,25) durch eine Platte hindurch.

Ges.: Nach der wievielten Platte „n“ sind noch 1% (0,01) Ausgangsstrahlung „S_0“ übrig?

$$\cancel{S_0} \cdot 0,25^n = \cancel{S_0} \cdot 0,01$$

: S_0 beide Seiten durch S_0 teilten, es kürzt sich S_0 weg.

$$0,25^n = 0,01$$

Diese Gleichung kannst du auch umdrehen, also **$0,25^n$** auf die rechte Seite und **0,01** auf die linke Seite. Das entspricht dann der Reihenfolge $b = a^x$ wie die allgemeinen Ligarithmengesetze oft dargestellt werden.

$$0,01 = (0,25)^n$$

$$n = log_{0,25}(0,01)$$

Nun muss man die Gleichung nach der gesuchten Anzahl der Platten „n“ auflösen. Weil „n“ ein Exponent ist, muss man durch logarithmieren (s. Logarithmusgesetze) nach n auflösen:

$$x = log_a b$$

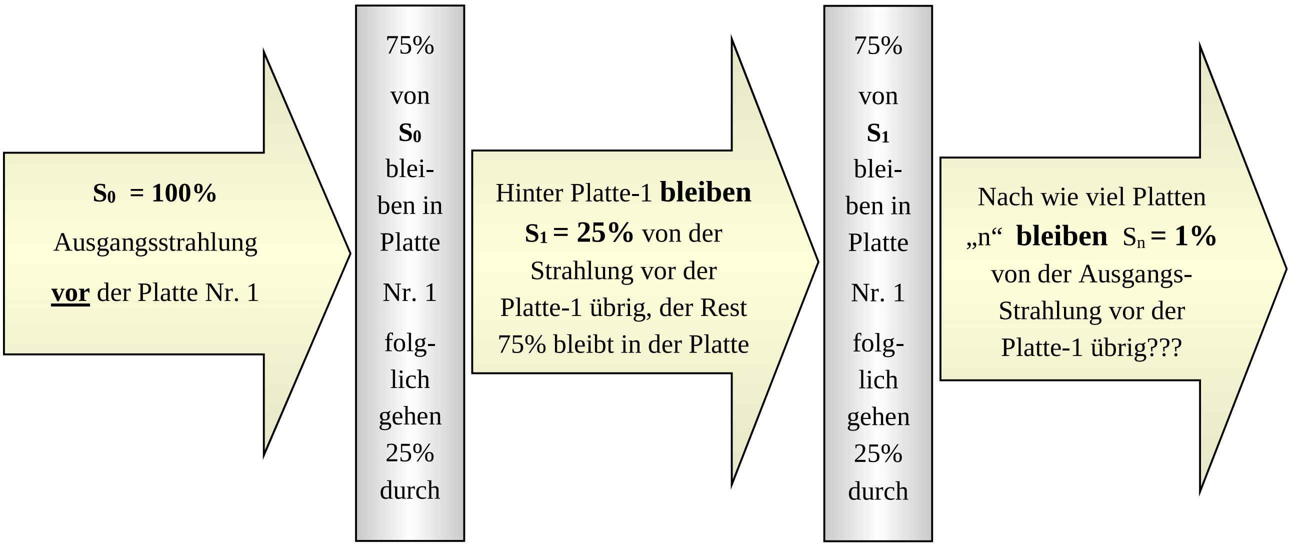
$$n = \frac{log(0,01)}{log(0,25)} = 3,322 \text{ Platten}$$

Ausführlche Erläuterung zum Lösungsweg

(1) Skizze/Planfigur - wenn möglich und hilfreich!

100% einer Ausgangsstrahlung S_0 treffen auf eine Platte und werden von dieser zu 75% verschluckt, so dass 100% - 75% = 25% übrig bleiben, also durch die Platte durchgehen und auf die nächste Platte treffen, wo diese S1 = 25% wieder zu 75% geschluckt werden und zu 25% durch die Platte gehe. Nach der wievielten Platte „n" ist nur noch S_n = 1% der Ausgangsstrahlung S_0 übrig?

Das kann man zum besseren Verständnis mal aufskizzieren:



(1) Aufgabentyp erkennen:

Immer dann, wenn ein Ausgangswert, S_0 nach einer „gleichbleibenden" Anzahl „n" von z.B. Jahren, Ereignissen, Tätigkeiten, eingebauter Gegenstände (z.B. Platten) oder ähnlichem, um einen „gleichbleibenden" Prozent- oder Zinssatz (z.B. 75% Verminderte Strahlung) gegenüber der Vorherigen Anzahl „n" (z.B. Platten, Jahren o.ä.) um diesen Prozentsatz (Zinssatz) wächst oder vermindert wird, dann handelt es sich um eine Exponentialaufgabe bei der die Anzahl „n" der Exponent ist und dieser Exponent gesucht ist. Wir prüfen zuerst ob es sich um eine klassische Zinsrechnung handelt. Das erkennen wir an Worten wie „Kapital", Jahreszins usw. . Habelt es sich um eine Zinsrechnung, dann wenden wir in der Regel die Zinsformel an. Handelt es sich nicht um eine klassische Zinsrechenaufgabe, wie bei dieser Aufgabe,

dann muss zunächst um eine Exponential-Gleichung aufstellen. Den dabei in der Regel gesuchten Exponenten (Anzahl) ermittelt man dann durch Anwendung der Logarithmenmengesetze.

Hier ist gegeben:

Der Ausgangswert S_0 einer Strahlung sei 100%

Nach einer Anzahl von n = 1 Platte bleiben davon noch S_1 = 25% (0,25) übrig, weil 75% von der Platte geschluckt werden.

Wird eine 2. Platte eingebaut dann vermindert sich der S_1-Wert wieder um 75%, es bleiben also vom S_1-Wert 25% usw.

Nach jeder Platte bleiben also 25% von dem was vor der jeweiligen Platte war. Die Anzahl „n" der Platten ist also als Exponent zum Prozentsatz einzusetzen: $\mathbf{0{,}25^n}$

Gefragt ist, nach der wievielten Platten nur noch S_n = 1% (0,001) von der Strahlung S_0 vorhanden ist, die als Ausgangsstrahlung vor der **allerersten** Platte losgeschickt wurde?

Wichtig!: Woher wissen wir jetzt, mit welchem Prozentsatz wir unsere Exponentialgleichung aufstellen müssen? Mit dem Prozentsatz der aussagt wie viel Strahlung von der Platte geschluckt wird (75%) oder mit dem Prozentsatz der aussagt was durch die Platte hindurch kommt, was also hinter der Platte an Strahlung **übrig bleibt** (25%)??? - Dazu fragen wir uns einfach was gesucht ist?

Es ist danach gesucht was hinter der Platte **übrig bleibt**. Nämlich, nach der wievielten Platte bleiben nur noch 1% vom Ausgangsstrahlwert übrig. Damit ist klar, wir müssen unsere Exponentialgleichung mit 25% (0,25) aufstellen, weil das der Prozentsatz ist der nach jeder Platte **übrig bleibt**.

(1) Gleichung aufstellen:

$S_0 * \mathbf{0{,}25^n} = S_0 * \mathbf{0{,}001}$

Die Gleichung besagt jetzt:

Beginnend mit der 100%-igen Ausgangsstrahlung „S_0" stellt sich die Frage, wie viel Platten „n" muss man einbauen, wenn nach jeder Platte 25% (0,25) von der auf die Vorderseite der jeweiligen Platte auftreffenden Strahlung S_n übrig bleibt (das war die linke Seite der Gleichung) und am Ende noch 1% (0,001) der 100%-igen Ausgangsstrahlung „S_0" übrig bleiben sollen (das war die rechte Seite der Gleichung).

$$\cancel{S_0} \cdot 0{,}25^n = \cancel{S_0} \cdot 0{,}01$$

: S_0 beide Seiten durch S_0 teilten, es kürzt sich S_0 weg.

$$0{,}25^n = 0{,}01$$

Diese Gleichung kannst du auch umdrehen, also $\mathbf{0{,}25^n}$ auf die rechte Seite und **0,01** auf die linke Seite. Das entspricht dann der Reihenfolge $b = a^x$ wie die allgemeinen Ligarithmengesetze oft dargestellt werden.

$$0{,}01 = (0{,}25)^n$$

Nun muss man die Gleichung nach der gesuchten Anzahl der Platten „n" auflösen. Weil „n" ein Exponent ist, muss man durch logarithmieren (s. Logarithmusgesetze) nach n auflösen:

$$x = \log_a b$$

$$n = \log_{0{,}25}(0{,}01)$$

Um nun die Plattenanzahl „n" auszurechen musst du je nach Taschenrechner folgendes eintippen:

$$n = \frac{lg\,(0{,}01)}{lg\,(0{,}25)} \;oder\; \frac{log\,(0{,}01)}{log\,(0{,}25)} \;oder\; \frac{ln\,(0{,}01)}{ln\,(0{,}25)} = 3{,}322\ Platten$$

Antwort:

Wenn eine 100%-ige AnfangsStrahlung S_0 zu p% = 25 % durch eine Platte hindurch geht (75% bleiben also in der Platte), dann sind nach n = 3,322 Platten nur noch 1% dieser AnfangsStrahlung S_0 vorhanden. Würde man aufrunden und genau 4 Platten einbauen, dann wäre hinter dieser 4ten Platten etwas weniger als 1% der AnfangsStrahlung S_0 übrig. Man könnte auch durch probieren berechnen nach wie vielen 1mm dicken Platten die Intensität der Strahlung auf 1% Reststrahlung zurück gegangen ist. Beim Durchdringen der 1mm dicken Platten nimmt die Strahlung um 75% ab. Es bleiben also 25% übrig. Bei 2mm Stärke bleiben dann 25% der 25%, also 6,25% der Anfangsstrahlung übrig, usw..

LS-S129-Aufgabe 12

Auf welchen Betrag wächst das Kapital mit Zinsen an, wenn es zu Beginn eines Jahres angelegt wird.

	a)	b)	c)	d)
Kapital [€]	**300**	**1000**	**5000**	**8000**
Zinssatz	**3,5%**	**1,5%**	**4,2%**	**4%**
Jahre	**2**	**3**	**1,5**	**2,5**
Kapital nach „n" Jahren				

Lösungsweg

Zinsformel: $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Zinsformel

Geg.: P = 3,5%; K_0 = 300 €; n = 2 Jahre

$K_2 = 300 \cdot \left(1 + \frac{3,5}{100}\right)^2$

$K_2 = 321,37\ €$

12b

$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Zinsformel

Geg.: P = 1,5%; K_0 = 1000 €; n = 3 Jahre

$K_3 = 1000 \cdot \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^3$

$K_2 = 1045,68\ €$

7.1 Optimierungsaufgaben

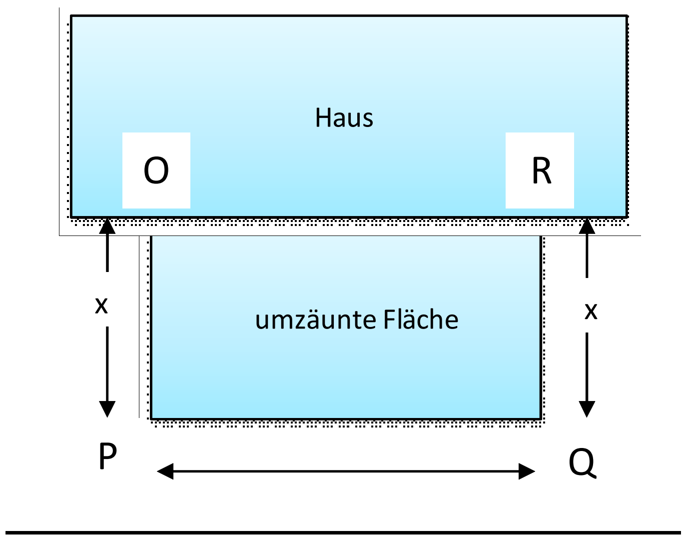
Häufig versucht man herauszufinden, wann eine Größe den **kleinsten** oder **größten** Wert annimmt.

Bei Größen, die sich durch eine **„quadratische Funktion“** bestimmen lassen, können diese Werte mithilfe des **Scheitels der zugehörigen Parabel** berechnet werden.

7.1.1.1 BeispAufgabe – LS9-K9- S. 136, A1 - Maurice 04.10.11

Mit einem 12 m langen Zaun soll an einer Hauswand ein Rechteck eingezäunt werden.

Wie müssen die Seiten des Rechteckes gewählt werden, damit sein Flächeninhalt möglichst groß wird ?



Lösungsweg

1. Aufgabe verstehen

Geg: 12 m Zaunlänge. An der Hauswand kein Zaun. Das heißt, die 12 m Zaun sind auf 3 Rechteckseiten aufzuteilen.

Ges: Die Rechteckseiten aus dem 12 m langen Zaun, sollen so lang und breit sein, das der Flächeninhalt des daraus entstehenden Rechteckes maximal, also Größtmöglich wird.

2. Zerlegen in Teilprobleme: Rechenplan und Rechenreihenfolge festlegen

2.1 Rechteckseiten mit einer Variablen ausdrücken

Die Seiten OP und QR sind beim Rechteck gleich lang, wir können für diese beiden Seiten daher eine einzige Variable (x) einführen:

OP = QR = x	Weil OP + PQ + QR = **12 m** und **x** = OP = QR ist, folgt daraus:
x + PQ + x = 12	Jetzt nach der Zaunseite PQ und x + x zusammenfassen zu 2x
2x + PQ = 12	2 x nach rechts bringen als – 2x
PQ = 12 - 2x	

2.2 Berechnung der Rechteckfläche als quadratische Funktion aufstellen.

A = Länge * Breite	Allgemeine Rechteckflächenformel
$A_{(x)}$ = OP * PQ	für OP = x = kurze Seite und für PQ = 12 – 2x = Langseite einsetzen
$A_{(x)}$ = x * (12 – 2x)	x ausmultiplizieren ergibt eine quadr. Funktion
$A_{(x)} = -2x^2 + 12x$	

2.3 Scheitelpunkt S (/) der zur quadratischen Funktion gehörenden Parabel bestimmen

$A_{(x)} = -2x^2 + 12x$ | Die Zahl bei x^2 ist **nicht** 1. Also muss Sie **ausgeklammert** werden: -2 (…)

Wichtig !: Beim Ausklammern von -2 wird +12x zu -6x, denn Plus geteilt durch Minus = Minus

$$A(x) = -2\left(\frac{-2}{-2}x^2 + \frac{12}{-2}x\right) = -2\left(x^2 - 6x\right)$$

$A_{(x)} = -2\,(x^2 - 6x)$ | nun die quadratische Ergänzung für den Term in der Klammer.

$A_{(x)} = -2\,(\mathbf{x^2 - 6x})$ | **QuadrErg.**: $(6/2)^2 = (3)^2 = 9$ **und Eckige Klammer nicht vergessen.**

$$A_{(x)} = -2\,[\,\underbrace{x^2 - 6x + \mathbf{9}}_{\text{2. Binom}}\; -9\,]$$

$A_{(x)} = -2\,[(\mathbf{x - 3})^2 - 9\,]$ | ausmultiplizieren: $\mathbf{-2 * (x-3)^2 = -2\,(x-3)^2}$

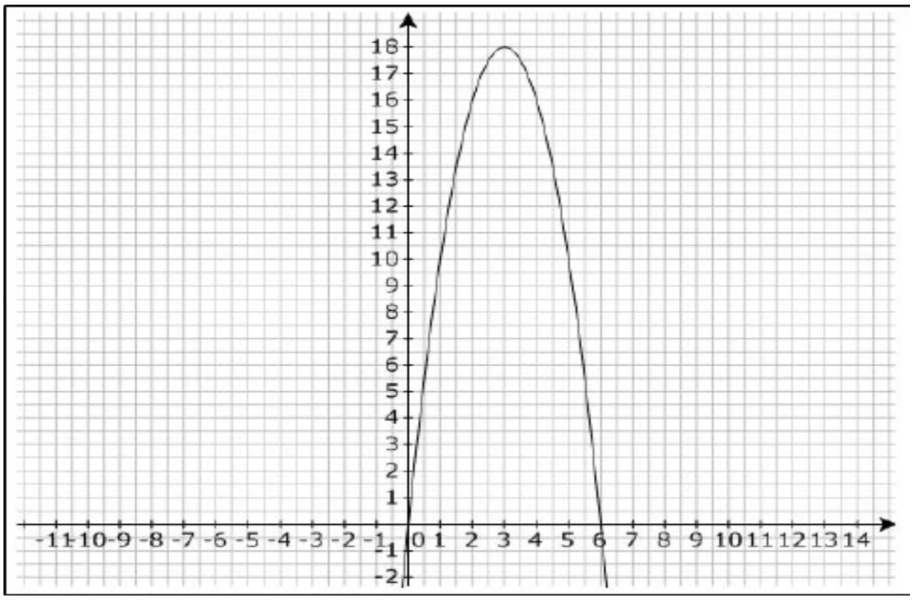
| ausmultiplizieren: $\mathbf{-2 * (-9) = +18}$

$$A_{(x)} = -2\,(\mathbf{x - 3})^2 + \mathbf{18} = \mathbf{SF}$$

SP (+ 3 | + 18) | x = 3m = kurze Rechteckseite
| y = 18m² = Maximal mögliche Fläche
| Lange Rechteckseite PQ = 12 – 2x = 12 – 2*3 = 6m

Antwort:

Mit der kurzen Rechteckseite x = 3 m und der langen Rechteckseite PQ = 12 - 2x = 12 – 2*3 = 12-6 = 6m erhält man die größte Fläche zu A = 18 m²



Weitere Erklärung zur vorstehenden Aufgabe:

1. BiFo: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

2. BiFo: $\boxed{(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2}$

3. BiFo: $(a+b) * (a-b) = a^2-b^2$

In unserem Fall wäre dann aus der 2.Bin. Formel $a = x$ *und* $b = \sqrt{9} = 3$

Beweis: $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2*x*3 + 3^2 = (x-3)^2$

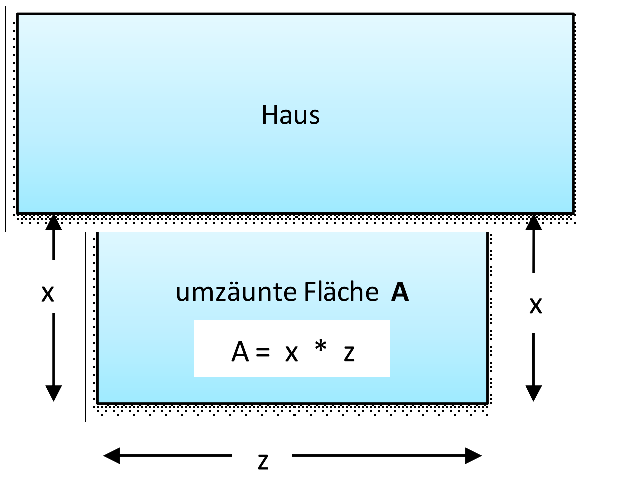
$A_{(x)} = -2\,(x^2 - 6x + 9 - 9)$ | für $x^2 - 6x + 9$ schreiben wir also: $(x-3)^2$ = 2. Binom Formel

$A_{(x)} = -2\,(x-3)^2 + 18$ |

7.1.1.2 BeispAufgabe – LS9-K9 - Maurice 04.10.11

Mit einem 6 m langen Zaun soll an einer Hauswand ein Rechteck eingezäunt werden.

Wie müssen die Seiten des Rechteckes gewählt werden, damit sein Flächeninhalt möglichst groß wird ?



Lösungsweg

<u>1. Aufgabe verstehen</u>

<u>Geg:</u> 6 m Zaunlänge. An der Hauswand kein Zaun. Das heißt, die 6 m Zaun sind auf 3 Rechteckseiten aufzuteilen.

<u>Ges:</u> Die Rechteckseiten aus dem 6 m langen Zaun, sollen so lang und breit sein, das der Flächeninhalt des daraus entstehenden Rechteckes <u>maximal, also</u> <u>Größtmöglich</u> wird.

<u>2. Zerlegen in Teilprobleme: Rechenplan und Rechenreihenfolge festlegen</u>

2.1 Rechteckseiten mit einer Variablen ausdrücken

Die KurzSeiten x sind beim Rechteck gleich lang, daher können sie beide mit der variablen „x“ bezeichnet werden (wären sie unterschiedlich lang, dann müssten sie auch unterschiedliche Variablen haben).

Der LangSeite des Rechteckes geben wir die variable „z“

Weil x + z + x = 6 m ist, folgt daraus:

$x + z + x = 6$ | Gleichung nach der LangSeite z auflösen

$2x + z = 6$

$\mathbf{z = 6 - 2x}$

2.2 Gleichung zur Berechnung des Rechteckfläche als <u>quadratische</u> Funktion aufstellen.

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

$A = \text{Länge} * \text{Breite}$ | Allgemeine Rechteckflächenformel

$A_{(x)} = x * z$ | für Kurzseiten = x und für Langseite z = 6 – 2x einsetzen (oben berechnet)

$A_{(x)} = x * (6 - 2x)$ | x ausmultiplizieren ergibt eine quadratische Funktion

$A_{(x)} = -2x^2 + 6x$ |

2.3 Scheitelpunkt S (/) der zur quadratischen Funktion gehörenden Parabel bestimmen

$A_{(x)} = -2x^2 + 6x$ | den Faktor 2 aus den ersten beiden Summanden ausklammern

$A_{(x)} = -2\,(-2x^2/-2 + 6x/-2)$ | $-2x^2/-2 = x^2$ und $6x/-2 = -3x$

$A_{(x)} = -2\,(x^2 - 3x)$ | **QErg:** $(3/2)^2 = \mathbf{(1{,}5)^2 = 2{,}25}$

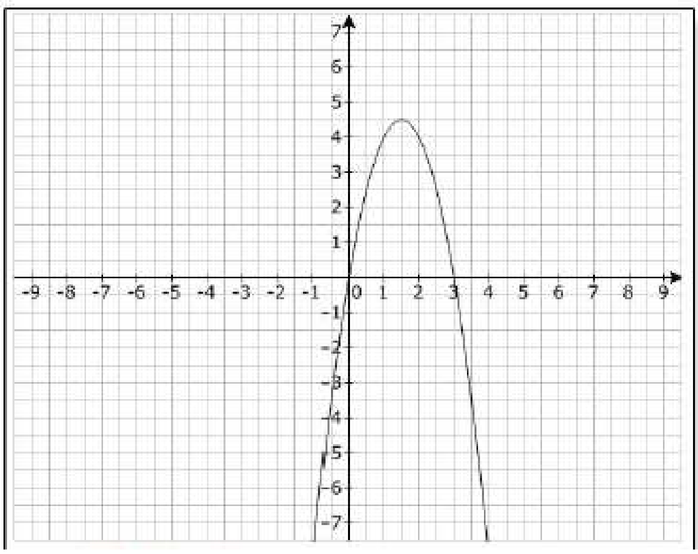
$A_{(x)} = -2\,[\,(x^2 - 3x + 2{,}25) - 2{,}25\,]$ | -2 ausmultiplizieren: $-2 * (x^2 - 3x + 2.25) = -2\,(x^2 - 3x + 2.25)$
Und $-2 * (-2{,}25) = +4{,}50$

$A_{(x)} = -2\,(x^2 - 3x + 2.25) + 4{,}5$ | in der (…) steht jetzt das 2. Binom

Merke: Die Hälfte der Zahl die bei x steht, hier 3/2 = 1,5

$A_{(x)} = -2\,(x - 1{,}5)^2 + 4{,}5$ | = SF

SP = (+ 1,5 | + 4,5) = Scheitelpunkt



8 LÖSEN QUADR. GLEICHUNGEN – PQ-FORMEL – ABC-FORMEL

[LS9, S. 28 ff]

NormalForm (NF) der qadr. Gleichung	**AllgemeineForm (AF) der qadr. Gleichung**
$\mathbf{x^2 + px + q = 0}$	$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

Lösung quadratischer Gleichungen = Auffinden der Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse)

- Zeichnerisch = näherungsweise Lösung
- **rechnerisch** = **exakte** Lösung

$x^2 + px + q = 0$ = NormalForm NF der quadratischen Gleichung

$x^2 + px + q = 0$		Glied ohne x auf rechte Seite bringen: **- q**
$x^2 + px = -q$		**QuaErg**.: $(p/2)^2$ auf beiden Seiten addieren
$\underbrace{x^2 + px + (p/2)^2}_{\text{1.Binom}} = (p/2)^2 - q$		links ist Binom entstanden: $x^2 + px + (p/2)^2 = \mathbf{(x+p/2)^2}$
$(x + p/2)^2 = (p/2)^2 - q$		Wir „Verwurzeln“ beide Seiten und erhalten:
$\lvert x + p/2 \rvert = \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$		

Also gilt:

$$\mathbf{x + p/2} = \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q} \quad \text{Oder} \quad \mathbf{x + p/2} = -\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Man erhält somit die Lösungen:

$$\mathbf{x_1} = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q} \quad \text{Und} \quad \mathbf{x_2} = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}$$

pq-Formel

Die Lösung einer quadr. Gleichung in NormalForm **$x^2 + px + q = 0$** kann man durch quadratische Ergänzung (beide Seiten mit $(p/2)^2$ addieren) berechnen. Sie lautet:

$$\boxed{\mathbf{x_{1/2}} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{(\tfrac{p}{2})^2 - q}}$$

Merke:
Da man **aus negativen Zahlen keine Wurzel ziehen** kann, entscheidet das Vorzeichen des Terms $\mathbf{(p/2)^2 - q}$, ob die Gleichung Lösungen besitzt. Der Term $\mathbf{(p/2)^2 - q}$ heißt „**Diskriminante**“.

Ist	$(p/2)^2 - q$	$>$	0	so sind $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ verschieden. Es gibt **zwei** Lösungen.
Ist	$(p/2)^2 - q$	$=$	0	so sind $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ gleich. Es gibt **eine** Lösung.
Ist	$(p/2)^2 - q$	$<$	0	so ist die Diskriminante $(p/2)^2 - q$ negativ. Es gibt **keine** Lösungen.

Bsp-1-LS-S28:

$x^2 + px + q$	$= 0$	=	NormalForm NF der quadratischen Gleichung

$x^2 + 5x + 6 = 0$ | Glied ohne x auf rechte Seite bringen: **- 6**

$x^2 + 5x = -6$ | **QuaErg**.: $(5/2)^2$ auf beiden Seiten addieren

$\underbrace{x^2 + 5x + (5/2)^2}_{\text{1.Binom}} = (5/2)^2 - 6$ | links = Binom: $x^2 + 5x + (5/2)^2 = \mathbf{(x+5/2)^2}$

$(x + 5/2)^2 = (5/2)^2 - 6$ | Wir „Verwurzeln" beide Seiten und erhalten:

$|x + 5/2| = \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 6}$

Also gilt:

$\mathbf{x + 5/2} = \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 6}$ Oder $\mathbf{x + 5/2} = -\sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 6}$

Man erhält somit die Lösungen:

$x_1 = -\left(\frac{5}{2}\right) + \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 6}$	Und	$x_2 = -\left(\frac{5}{2}\right) - \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 6}$
$x_1 = -2,5 + \sqrt{6,25 - 6}$		$x_2 = -2,5 - \sqrt{6,25 - 6}$
$x_1 = -2,5 + \sqrt{0,25}$		$x_2 = -2,5 - \sqrt{0,25}$
$x_1 = -2,5 + 0,5$		$x_2 = -2,5 - 0,5$
$x_1 = -2,0$		$x_2 = -3,0$

8.1 Abc-Formel zur Lösung der allgemeinen Form der quadr. Gl.

Lösen einer in allgemeinen Form (AF) $ax^2 + bx + c = 0$ vorliegende quadratische Gleichung:

1. dividiere zuerst durch „a" so erhältst du die Normalform: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$\frac{b}{a}$ *entspricht p* *und* $\frac{c}{a}$ *entspricht q* ; Lösung: $x_{1/2} = -\left(\frac{b}{2a}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$

Durch Termumformung erhält man die

Allgemeine Lösungsformel:	$x_{1/2} = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$

Bsp-1-LS-S29 zur Anwendung der p-q-Formel:

$3x^2$	-	12	= 6x	=	AllgForm AF der quadratischen Gleichung

$3x^2 - 12 = 6x$ | - 6x nach links, schreibe es direkt nach dem ax^2

$3x^2 - 6x - 12 = 0$ | geteilt durch die Zahl die bei $\mathbf{x^2}$ steht, hier **3**, ergibt die NF

$3/3x^2 - 6/3x - 12/3 = 0$ | = NF: $x^2 + px + q = 0$, jetzt pq-Formel anwenden

$\mathbf{x^2 - 2x - 4 = 0}$ | = NF: $x^2 + px + q = 0$, jetzt pq-Formel anwenden
| p = -2 und q = -4 in pq-Formel einsetzen. **Dabei das**
| Vorzeichen mit einsetzen !!!

$\mathbf{x_1} = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$	Und	$\mathbf{x_2} = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

$\mathbf{x_1} = -\left(\frac{-2}{2}\right) + \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - (-4)}$	Und	$\mathbf{x_2} = -\left(\frac{-2}{2}\right) - \sqrt{(\frac{-2}{2})^2 - (-4)}$
$\mathbf{x_1} = -(-\mathbf{1}) + \sqrt{(-1) * (-1) + 4}$		$\mathbf{x_2} = -(-\mathbf{1}) - \sqrt{(-1) * (-1) + 4}$
$\mathbf{x_1} = +\mathbf{1} + \sqrt{+1 + 4}$		$\mathbf{x_2} = +\mathbf{1} - \sqrt{+1 + 4}$
$\mathbf{x_1} = \mathbf{1} + \sqrt{5} = 1 + 2{,}24$		$\mathbf{x_2} = +\mathbf{1} - \sqrt{5} = 1 - 2{,}24$
$\mathbf{x_1} = \mathbf{3{,}24}$		$\mathbf{x_2} = -\mathbf{1{,}24}$

LS-S35A1a: Berechne die gesuchten Zahlen

Das Produkt einer Zahl und der um 4 verminderten Zahl ist 21

Gleichung aufstellen:

$x \ * (x-4) \quad = \quad 21$ | auf die NF: $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ bringen

| ausmultiplizieren und +21 als -21 nach links bringen

$x^2 -4x - 21 \quad = \quad 0$ | = NF: $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$ mit $\mathbf{p = -4}$ und $\mathbf{q = +21}$

| jetzt **pq-Formel** anwenden

$\mathbf{x^2 - 4x - 21 \quad = \quad 0}$ | = NF: $x^2 + px + q = 0$, jetzt pq-Formel anwenden

| p = -4 und q = +21 **mit Vorzeichen in pq-F einsetzen !!!**

$$\mathbf{x_1} = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Und

$$\mathbf{x_2} = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$\mathbf{x_1} = -\left(\frac{-4}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-21)}$	Und	$\mathbf{x_1} = -\left(\frac{-4}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - (-21)}$
$\mathbf{x_1} = -(-\mathbf{2}) + \sqrt{(-2) * (-2) + 21}$		$\mathbf{x_1} = -(-\mathbf{2}) - \sqrt{(-2) * (-2) + 21}$
$\mathbf{x_1} = +\mathbf{2} + \sqrt{+4 + 21}$		$\mathbf{x_1} = +\mathbf{2} - \sqrt{+4 + 21}$
$\mathbf{x_1} = \mathbf{2}+\sqrt{25} = 2 + 5$		$\mathbf{x_1} = \mathbf{2}+\sqrt{25} = 2 -5$
$\mathbf{x_1} = \mathbf{7}$		$\mathbf{x_1} = -\mathbf{3}$

2. Lösungsweg über LinearFaktZerl und Satz von VIETA

Bsp-1-LS-S29 zur Anwendung der allgemeinen Lösungsformel (abc-Formel):

$4x^2$	-	$28x$	- 15	= 0	=	AF: $ax^2 + bx + c = 0$

$4x^2 \;-\; 28x \;-\; 15 \;=\; 0$ | $a = 4$; $b = -28$; $c = -15$

Allgemeine Lösungsformel:

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$x_1 = \frac{-(-28) + \sqrt{(-28)^2 - 4 * 4 * (-15)}}{2 * 4}$$

$$x_1 = \frac{28 + \sqrt{(-28) * (-28) \quad - (-240)}}{8}$$

$$x_1 = \frac{28 + \sqrt{784 + 240)}}{8}$$

$$x_1 = \frac{28 + \sqrt{1024)}}{8}$$

$$x_1 = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$$

A 2e LS-S29 Anwendung der p-q-Formel:

10x - 6 - 3x² = 0 | Auf **AF** bringen: Summanden so ordnen: $ax^2 + bx + c = 0$

$-3x^2 + 10x - 6 = 0$ | Auf **NF** bringen: geteilt durch Zahl die bei **x²** steht, hier **-3**

$$\frac{-3x^2}{-3} + \frac{10\,x}{-3} - \frac{6}{-3} = 0$$

$$x^2 - \frac{10\,x}{3} + 2 = 0$$ | = NF: **$x^2 + px + q = 0$** , jetzt **pq-Formel** anwenden

$$\boxed{x_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

$$p = -\frac{10\,x}{3} \quad und \quad q = +2$$

| Vorzeichen mit einsetzen !!!

$$\boxed{x_1 = -\left(\frac{-\frac{10}{3}}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{-\frac{10}{3}}{2}\right)^2 - (2)}}$$

$$-\left(\frac{-\frac{10}{3}}{2}\right) = -\left(-\frac{10}{3} * \frac{1}{2}\right) = +\frac{5}{3}$$

$$x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - (2)}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \; und \; 2 = \frac{2}{1} * \frac{9}{9} = \frac{18}{9}$$

$$x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{25}{9} - \left(\frac{18}{9}\right)}$$

$$x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{7}{9}}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{5}{3} + \frac{\sqrt{7}}{3}}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{5}{3} - \frac{\sqrt{7}}{3}}$$

9 LINEARFAKTOREN – FAKTORIEREN – VIETA-SATZ

9.1 Reinquadratische Gleichungen

Wie für viele Aufgaben dieser Art musst du früher gelerntes wieder hervorkramen. Merke:

Vor einer Wurzel kann immer ein + Zeichen oder ein – Zeichen stehen.

$\mathbf{x^2 = 4}$

$\mathbf{x_1 = \sqrt{4}}$ **und** $\mathbf{x_2 = -\sqrt{4}}$

Rein quadratische Gleichungen haben die Normal-Form:

$x^2 + px + q = 0$

Bsp.: $x^2 + 5x + 6 = 0$

In dieser Gleichung ist x das Variable Glied, d.h. wir müssen für x verschiedene Zahlen einsetzen um auf das Ergebnis = 0 also die Nullstellen der Parabel zu kommen. Meist gibt es zwei Lösungen x_1 und x_2 mit gleichen Betrag aber unterschiedlichem Vorzeichen. Begründung siehe oben !

p ist, wie im Bsp. oben, vom Betrag her bekannt und Konstant kann aber sowohl negativ als auch positiv sein weil es ein Faktor von x ist: Bsp.: p = 5 oder P = -5

q ist das Kontante Glied. Es kann positiv oder negativ aber nie positiv und negativ.

Bsp.: $x^2 + 5x + 6 = 0$ drin ist **p = +5** oder **-5** und **q = 6**

9.2 Quadr Gl. ohne konstantes Glied „q“ löst man durch Ausklammern.

Beispiel:

$x^2+8x=0$

$x(x+8)=0$

$x_1=0$ und $x_2=-8$

Probe für x_1=0:

$0*(0+8) = 0$

$0 = 0$ Gleichung erfüllt $x_1=0$ stimmt also !

Probe für x_2= - 8:

$-8*(-8+8) = 0$

$0 = 0$ Gleichung erfüllt, $x_2=-8$ stimmt also !

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

VIETA-SATZ

Sind (x_1; x_2) die Lösungen der quadGl $x^2+px+q=0$, so gilt: $p=-(x_1+x_2)$ u. $q=x_1*x_2$

$x^2+8x+0=0$

$x^2+px+q=0$

$x(x+8)=0$

$x_1=0$ und $x_2=-8$

Probe ob $x_1=0$ u. $x_2=8$ die Lösungen der Gleichung $x^2+8x+0=0$ sind mit Satz von Vieta:

1. Probe

$p = -(x_1+x_2)$ mit $p=8$

$p = 8 = (0+8)=8$ also demnach stimmt die Lösung $x_1=0$ und $x_2=-8$

2. Probe

$q = x_1 \bullet x_2$ mit $q=0$ und $x1=0$

$q = 0=0 \bullet x_2=0*8=0$ also demnach stimmt die Lösung $x_1=0$ und $x_2=-8$

9.3 Faktorisieren = LinFaktZerl rein quadGl $x^2+px+q = (x-x_1)*(x-x_2)$

9.3.1 Faktorisiere durch geschicktes Probieren

LS-S32-Bsp.2: $x^2 + x - 12$

Lösungsweg:

$x^2 + x - 12 = x^2 + \mathbf{p}x + \mathbf{q}$

Bei diesem Aufgabentyp immer **drei** Lösungsschritte:

(1) Zerlege **q** = **-12** in zwei Faktoren $\mathbf{x_1 * x_2}$, dass

(2) deren Summe **p** = $\mathbf{(x_1 + x_2)*(-1)}$ = **+1***(-1) = **-1** ergibt.

(3) Die in (1) und (2) ermittelten $\mathbf{x_1}$ und $\mathbf{x_2}$ in die VIETA-Linearfaktoren **(x - x1) * (x - x2) einsetzen**

(4) Kontrolle durch ausmultiplizieren

Also:

----

(1) $\mathbf{p = -(x_1 + x_2)}$

$+1 = -(3 - 4) = +1$ **ok!**

----

(2) $\mathbf{q = x_1 * x_2}$

$-12 = 3 * (-4) = -12$ **ok!** | Also sind: $\mathbf{x_1 = +3}$ und $\mathbf{x_2 = -4}$

----

(3) Linearfaktorenzerlegung nach Vieta und Kontrolle durch ausmultiplizieren links

$\mathbf{(x-x_1)(x-x_2)} = x^2 + x - 12$ | $\mathbf{x_1 = +3}$ und $\mathbf{x_2 = -4}$ | Vorzeichen beachten

$\mathbf{(x-3)(x+4)} = x^2 + x - 12$ | linke Seite ausmultipl. = Kontrolle

$\mathbf{x^2 - 3x + 4x - 12} = x^2 + x - 12$

$\mathbf{x^2 + x - 12} = x^2 + x - 12$ **ok!**

LS-S33-A3a: $x^2 - 9x + 14$ **Lösung**: (x-2) (x-7)

Lösungsweg:

$x^2 - 9x + 14 = x^2 + \mathbf{p}x + \mathbf{q}$

----

(1) p = - ($x_1 + x_2$)

-9 = - (2 + 7) = -9 **ok!**

----

(2) q = x1 * x2

+ 14 = 2 * 7 = +14 **ok!** | Also sind: $\mathbf{x_1 = +2}$ und $\mathbf{x_2 = +7}$

----

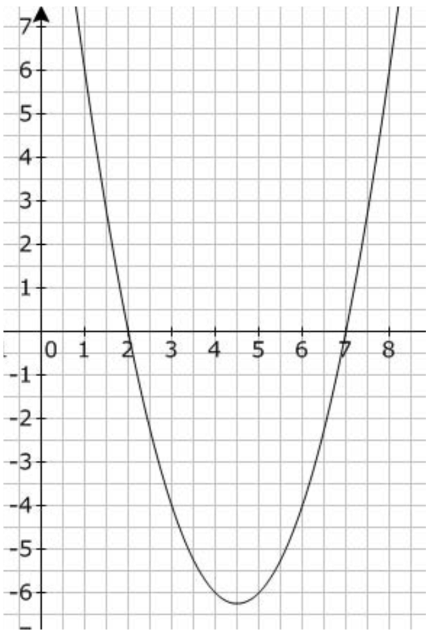
(3) VIETA-LinFaktZerl

$(x-x_1)\ (x-x_2)$ = $x^2 - 9x + 14$ | $\mathbf{x_1 = +2}$ und $\mathbf{x_2 = +7}$ | Vorzeichen beachten

(x-2) (x-7) = $x^2 - 9x + 14$ | linke Seite ausmultipl. = Kontrolle

x^2-2x-7x + 14 = $x^2 - 9x + 14$

x^2- 9x + 14 = $x^2 - 9x + 14$ **ok!**



Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

LS-S33-A3b: $x^2 - 15x + 26$ **Lösung**: (x-13) (x-2)

Lösungsweg:

$x^2 - 15x + 26 = x^2 + \mathbf{p}x + \mathbf{q}$

----

(1) p = - ($x_1 + x_2$)

-15 = - (2 + 13) = - 15 **ok!**

----

(2) q = x1 * x2

+ 26 = 2 * 13 = +26 **ok!** | Also sind: $\mathbf{x_1 = +2}$ und $\mathbf{x_2 = +13}$

----

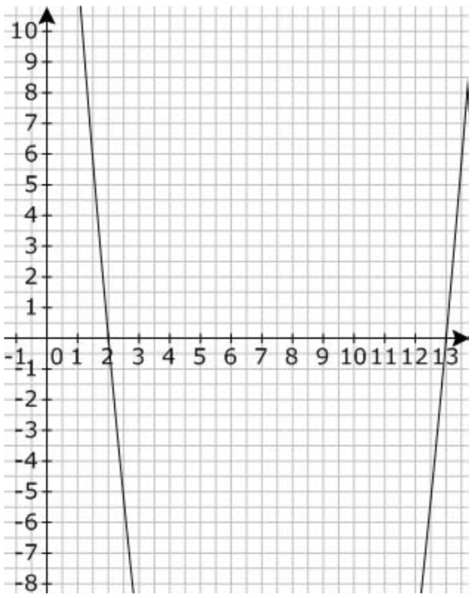
(3) VIETA-LinFaktoren

$(x-x_1)\ (x-x_2)$ = $x^2 - 15x + 26$ | x_1 = **+2** und x_2 = **+13** | Vorzeichen beachten

(x-2) (x-13) = $x^2 - 15x + 26$ | linke Seite ausmultipl. = Kontrolle

x^2-13x-2x + 26 = $x^2 - 15x + 26$

x^2- 15x + 26 = $x^2 - 15x + 26$ **ok!**



LS-S33-A3c: $x^2 - 10x + 16$

Lösungsweg:

$x^2 - 10x + 16 = x^2 + \mathbf{p}x + \mathbf{q}$

----

(1) p = - ($x_1 + x_2$)

-10 = - (2+ 8) = -10 **ok!**

----

(2) q = x1 * x2

+16 = 2 * 8 = +16 **ok!** | Also sind: $\mathbf{x_1 = +2}$ und $\mathbf{x_2 = +8}$

----

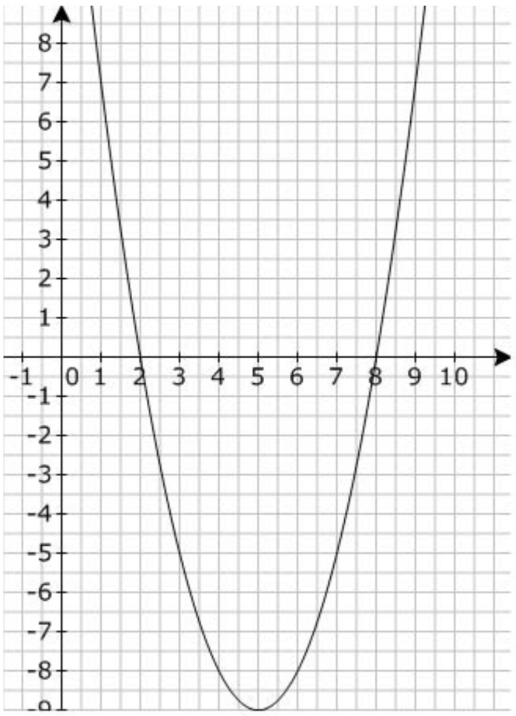
(3) VIETA-LinFaktoren

$(x-x_1)\,(x-x_2) = x^2 - 10x + 16$ | $x_1 = +2$ und $x_2 = +8$ | Vorzeichen beachten

$(x-2)\,(x-8) = x^2 - 10x + 16$ | linke Seite ausmultipl. = Kontrolle

$x^2 - 8x - 2x + 16x^2 = x^2 - 10x + 16$

$x^2 - 10x + 16 = x^2 - 10x + 16$ **ok!**



LS-S33-A3d: $x^2 + x - 6$

Lösungsweg:

$x^2 + x - 6 \quad = \quad x^2 + \mathbf{p}x \quad + \mathbf{q}$

----

(1) p = - (x_1 + x_2)

$-6 \quad = \quad - (+2 - 3)$

$+ 6 \quad = \quad - (-1) = \quad + 1$ **ok!**

----

(2) q = x1 * x2

$- 6 \quad = \quad 2 * (-3) \quad = \quad - 6$ **ok!** | Also sind: $\mathbf{x_1 = +2}$ und $\mathbf{x_2 = -3}$

----

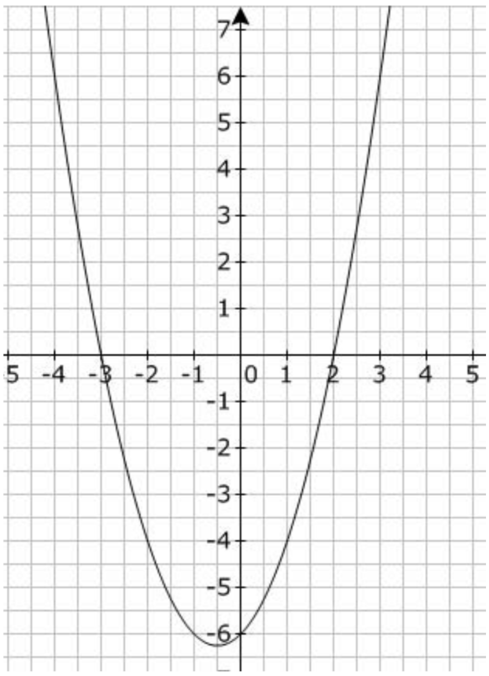
(3) VIETA-LinFaktoren

$(x-x_1)\ (x-x_2)$ $= x^2 + x - 6$ | $\mathbf{x_1}$ = **+2** und $\mathbf{x_2}$ = **-3** | Vorzeichen beachten

(x-2) (x+3) $= x^2 + x - 6$ | linke Seite ausmultiplizieren = Kontrolle

$x^2 - 2x + 3x + 6$ $= x^2 + x - 6$ -

$x^2 + x - 6$ $= x^2 + x - 6$ **ok!**



LS-S33-A3e: $x^2 - 3x - 10$

Lösungsweg:

$x^2 - 3x - 10 = x^2 + \mathbf{p}x + \mathbf{q}$

(1) p = - (x1 + x2)

+3 = - (-2 + 5)

+ 3 = - (+3)= - 3 **ok!**

(2) q = x1 * x2

- 10 = -2 * 5 = - 10 **ok!** | Also sind: $\mathbf{x_1 = -2}$ und $\mathbf{x_2 = +5}$

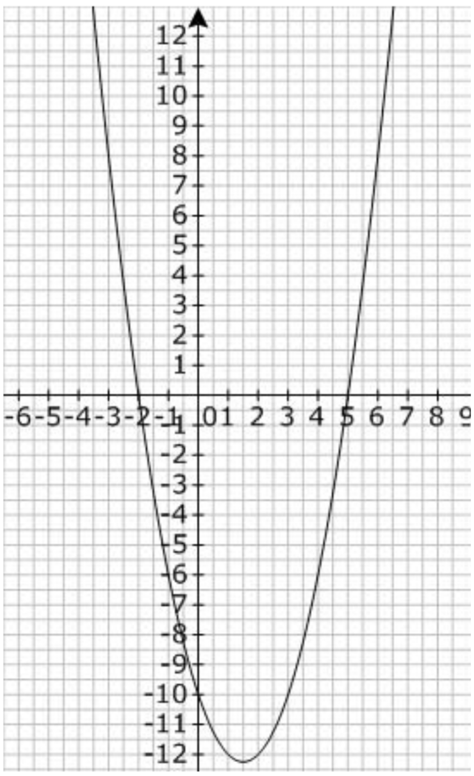
(3) VIETA-LinFaktoren

$\mathbf{(x-x_1)\ (x-x_2)} = x^2 - 3x - 10$ | $\mathbf{x_1} = \mathbf{+2}$ und $\mathbf{x_2} = \mathbf{-5}$ | Vorzeichen beachten

$\mathbf{(x+2)\ (x-5)} = x^2 - 3x - 10$ | linke Seite ausmultiplizieren = Kontrolle

$\mathbf{x^2 + 2x - 5x - 10} = x^2 - 3x - 10$

$\mathbf{x^2 - 3x - 10} = x^2 - 3x - 10$ **ok!**



Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

LS-S35-A1a: Berechne die gesuchten Zahlen:

Das Produkt einer Zahl und der um 4 verminderten Zahl ist 21

Lösung: (x-7) (x+3) und damit x_1=+7 * x_2= -3

Lösungsweg:

$x^2 - 9x + 14 = x^2 + \mathbf{p}x + \mathbf{q}$

$p = -(x_1 + x_2) = -9$

$c = x_1 * x_2 = 14$

Zerlege **c** = **+14** in zwei Fakt. x_1*x_2, dass deren Summe **b** = (x_1+x_2)*(-1) = **-9***(-1) = **+9** ergibt.

Durch probieren findet man:

2 * 7 = +14 und **2 + 7** = +9 | also sind: x_1 = +2 und x_2 = +9

$x^2 - 9x + 14 = (x-x_1)(x-x_2)$ | x_1 = +2 u. x_2 = +9 einsetzen dabei **Vorzeichen Beachten !**

$x^2 - 9x + 14 =$ **(x-2) (x-7)**

LS-S33-A3f: $x^2 + 7x - 18$ **Lösung**: $(x-2)(x+9)$

Lösungsweg:

Bist Du sicher ?

LS-S33-a: $x^2 + 5x - 6$ **Lösung**: $(x+6)(x-1)$

Lösungsweg:

LS-S33-b: $x^2 + 6x + 8$ **Lösung**: $(x+4)(x+2)$

Lösungsweg:

LS-S33-c: $x^2 + 12x + 20$ **Lösung**: $(x+10)(x+2)$

Lösungsweg:

LS-S33-A6:

Bestimme p bzw. q so, dass die angegebene x_1 Zahl eine Lösung ist. Wie lautet dann x_2?

LS-S33-A6a: $x^2 + px - 21 = 0$ **mit**: $x_1 = 7$

Lösungsweg:

$(x - x_1)(x - x_2)$ | $x_1 = 7$ einsetzen. **Vorzeichen beachten** -*- = + !

$(x + 7)(x - x_2)$ | x_2 berechnen aus $q = x_1 * x_2$

NR: $q = x_1 * x_2$ | einsetzen $x_1 = 7$ und $q = -21$

$-21 = 7 * x_2$ | :7

$\mathbf{-3 = x_2}$

$p = -(x_1 + x_2)$ | $x_1 = 7$ und $x_2 = -3$

$p = -(7-3)$ | $x_1 = 7$ und $x_2 = -3$

$p = -(+4)$

$\mathbf{p = -4}$

$b = -(x_1 + x_2) = -3$

$c = x_1 * x_2 = -10$

Zerlege **c** = **-10** in zwei Fakt. $x_1 * x_2$, dass deren Summe **b** = $(x_1+x_2)*(-1)$ = **-3***(-1) = **+3** ergibt.

Durch probieren findet man:

-2 * 5 = -10 u. **-2 +5** = +3 | also sind: $x_1 = -2$ und $x_2 = +5$

$x^2 + x - 6 = (x - x_1)(x - x_2)$ | $x_1 = -2$ u. $x_2 = +5$ einsetzen. **Vorzeichen Beachten !**

$x^2 + x - 6 =$ **(x+2) (x-5)**

10 LÖSUNGSSTRATEGIEN TRAINIEREN – 9. KL-GYM

10.1 AufgTyp: Prozent – <u>Vermehrter</u> Grundwert

G = Grundwert = Anfangswert der 100% darstellt

W = Prozentwert = Zahlenwert des gegebenen oder gesuchten Prozentsatzes %

P = Prozentsatz %

$\boldsymbol{W = \frac{G * P}{100}}$	$\boldsymbol{P = \frac{W * 100}{G}}$	$\boldsymbol{G = \frac{W * 100}{P}}$

10.1.1 Aufg.: Der Benzinpreis ist in den letzten drei Monaten.....

Der Benzinpreis ist in den letzten drei Monaten im Schnitt um jeweils 3% gestiegen.

Heute kostet 1 Liter Benzin 1,01 €. Wie viel hat ein Liter Benzin vor drei Monaten gekostet ?

Angenommen wir haben heute den 1.4.11 und wollen wissen wie der Preis vor 3 Monaten war.							
Heute:		01.04.2011	x € =	X			
1 Monat zurück:		01.03.2011	x1 € =	x + 3% von x			
2 Monate zuück:		01.02.2011	x2 € =	x1 + 3% von x1			
3 Monate zuück:		01.01.2011	x3 € =	x2 + 3% von x2			
	Es wird gesagt, der Preis ist in den letzten 3 Monaten um <u>**"jeweils"**</u> 3% gestiegen...						
	um **"jeweils"**						
	Das heißt <u>**nicht**</u>: Der Wert im 1. Monat war im 3. Monat um 3% höher, sondern,						
	Das heißt: <u>**Jeden**</u> Monat ist der Preis des jeweiligen Vormotats um 3% gestiegen.						
	<u>Also:</u>						
	Benzinpreis 1. Monat =		x1 € =	x1			
	Benzinpreis 2. Monat =		x2 € =	x1 + 3% von x1			
	Benzinpreis 3. Monat =		x3 € =	x2 + 3% von x2			
<u>**Vorwäts-Beispiel:**</u>		<u>Geg:</u>	Preis am 1.1.11:		0,92	€	
	_	_	Preisanstieg je Monat:		3	%	
	_	<u>Ges:</u>	Preis 3 Monate später		?	€	
	_						
Derzeit	Preis 01.01.11 =		x € =	0,92	€	x wäre der Grund-wert !	
1 Mo zu-rück	Preis 01.02.11 =		x1 € =	0,92 + 0,92 * (3 / 100) =			0,95

2 Mo zurück	Preis 01.03.11 =		x2 € =	0,9476 + 0,9476 * (3 / 100) =			0,98
3 Mo zurück	Preis 01.04.11 =		x3 € =	0,976028 + 0,976028 * (3 / 100) =			1,01
Die Aufgabe wird genauso gerechnet, nur "Rückwärts"							
Rückwärts-Beispiel:		Geg:	Preis am 1.4.11:		0,92	€	
	_	_	Preisanstieg je Monat:		3	%	
	_	Ges:	Preis 3 Monate vorher		?	€	
	_						
1. Überlegung:							
Wenn der Preis vor 1 Monat 3 % Niedriger war, dann ist er jetzt auf 103 %							
		103%	* G =	1,01	Aktueller Benzinpreis gegeben !		
		1,03	* G =	1,01			
			G =	0,98	1 Monat zurück		
		103%	* G =	0,98			
		1,03	* G =	0,98			
			G =	0,95	2 Monat zurück		
		103%	* G =	0,95			
		1,03	* G =	0,95			
			G =	**0,92**	**3 Monat zurück**		

Lösung - Prozentrechnung

1. Der Starpreis in € vor 3 Jahren entspricht in der Prozentrechnung dem Grundwert G und ist demnach 100%

2. Wenn der Preis nach 3 Jahren im Schnitt um 3 % gestiegen ist, dann ist er jeden Monat um 1% gestiegen.

3. Demnach ist er nach 3 Monaten auf 103% des ursprünglichen Grundwertes „G“ gestiegen und dieser Wert ist in der Aufgabe mit 1,01 € = 103% vom G gegeben:

Heute: 103% = 1,01€

Vor 1 Monat 1% billiger.

Wie viel ist also 1% von 1,01€ wenn 1,01€ =103% ist ?

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Hilfreich ist der Dreisatz:

$\frac{\boldsymbol{x1}}{\mathbf{1\%}} = \frac{\mathbf{1{,}01\ €}}{\mathbf{103\%}}$ | nach x1 auflösen, also beide Seiten * 1%

$\underline{\boldsymbol{x1}} = \frac{\mathbf{1{,}01\ €*1\%}}{\mathbf{103\%}} = \mathbf{0{,}0098\ €}$

Preis vor 1 Monat: 1,01€ - 0,0

vor 3 Monaten:	vor 2 Monaten:	vor 1 Monaten:
103 % = 0,95 €	103 % = 0,98 €	103 % = 1,01 €
1 % = 0,0092 €	1 % = 0,0095 €	1 % = 0,0098 €
100 % = 0,92 €	100 % = 0,95 €	100 % = 0,98 €

Vor 3 Monaten kostete ein Liter Benzin noch 0,92 €.

G $^{\cdot 1{,}03}$ 1,01 €

10.2 Zwei Kräne...: Verhältnisse /Dreisatz / LinGl

Zwei Kräne brauchen zusammen vier Stunden, um ein Schiff zu beladen.

Nach einer Stunde fällt ein Kran aus. Der andere Kran benötigt dann alleine noch weitere 5 Stunden, um das Schiff zu beladen.

Wie lange würde jeder Kran alleine brauchen?

Lösungshinweis PG/2011

Die Aufgabe ist, wie man schnell sieht, mal wieder von Theoretikern gestellt die nicht daran interessiert sind, dass der Schüler eine Lösungsstrategie lernt und verinnerlicht. Es werden im Aufgabentext einige Dinge nicht gesagt, die man man durchaus sagen kann ohne dass sie eine Lösungshinweis sind. Die aber in die Sackgasse führen und dem Schüler suggerieren, er sei blöd, wenn man Sie nicht sagt. Schade, denn eigentlich eine schöne Aufgabe. Ich werde versuche diese Dinge klar zu stellen und hoffe, dass der Lösungsweg dann verständlich wird.

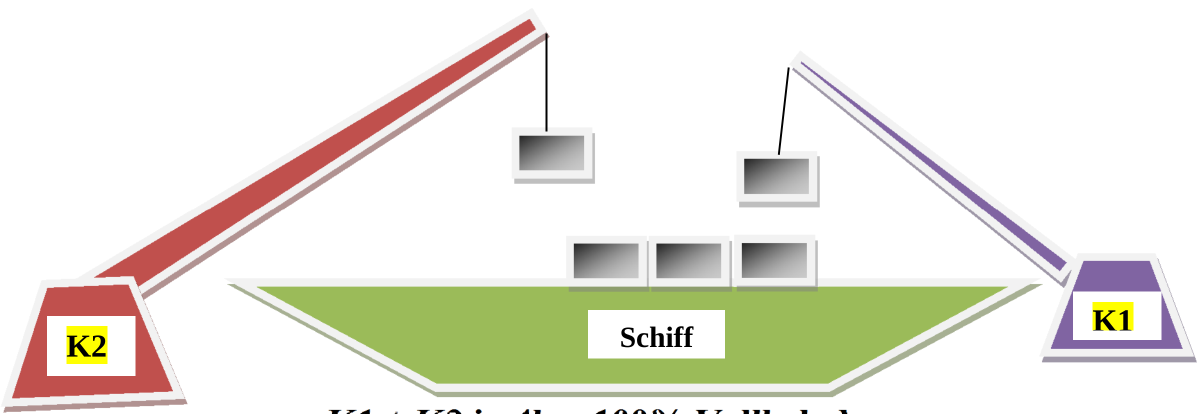
Die Aufgabe kann grundsätzlich:

1. Über ein Lineares Gleichungssystem oder
2. Über Verhältnisrechnung in Dreisatzform gelöst werden.

Wir wählen hier erst mal den Weg 2: Verhältnisrechnung in Dreisatzform:

Lösungsweg über Verhältnisse und Dreisatzgleichung

Macht euch am besten erst mal eine Skizze und schreibt mit Abkürzung (z.B. K1 für Kran 1) in die Skizze was ihr aus dem Text entnehmt.



K1 + K2 in 4h = 100% Vollbeladung

Normalerweise denkt man, wenn K1+K2 zusammen 4h brauchen für eine Vollbeladung, dann braucht einer allein das doppelte also 8h.

Das ist die erste falsche Annahme, welche die Aufgebensteller hätte vermeiden können.

Also: Ihr müsst euch vorstellen, das K1 + K2 unterschiedlich groß sind und in den 4h zwar gemeinsam das Schiff beladen, aber der eine läd in dieser Zeit von den 5 Kisten halt 2 Stück und der andere läd 3 Stück auf, okay, verstanden ?

Was ihr euch noch klar machen solltet:

Wenn das Schiff zum Beispiel mit 5 Kisten voll = 100% beladen ist, dass wären eine Vollladung als Bruch ausgedrückt z.B. 4/4 oder 5/5 Ladung.

2. Lösungsschritt

Wenn ich versuche einem Schüler zu helfen die Aufgabe zu lösen, muss ich zunächst Missverständnisse ausräumen und dann einen Lösungsweg wählen, der nachvollziehbar und plausibel ist. Hinzu kommt, das die anzuwendenden Rechenregel nicht (kann der Schüler Dreisatz, kann er Gleichungen nach einer Variablen umstellen, kann er 2/3 Stunden in Minuten umwandeln etc.), nicht einfach, aber wichtig herauszufinden.

Missverständnisse bei dieser Aufgabe:

Die Aufgabe suggeriert dem Schüler, dass die 2 Kräne gleich groß, gleich Leistungsfähig sind und damit das jeder in der gleichen Zeit, die gleiche Arbeit schafft. Dem Schüler muss man also zunächst sagen, dass der Kran 1 zum Beispiel in 2 h („h“ steht für Stunden) nicht das gleiche schafft was wie Kran 2, sondern er schafft mehr oder weniger als Kran 2. Der Grund liegt darin, dass die Kräne z.B. unterschiedlich groß sind, oder jeder einen anderen Motor hat, oder an einem anderen Platz steht, der etwas weiter vom Arbeitsplatz weg ist.

Der verständlichste Lösungsweg:

Auch der verständlichste Lösungsweg, kann für den ein oder anderen Schüler noch unverständlich sein, weil es vielleicht nur einen Lösungsweg gibt und selbst wenn es mehrere gibt, so können diese allesamt relativ schwer und damit unverständlich sein. Dennoch lohnt es sich in der Regel als Lehrer immer nach einem plausiblen, einfachen, „alltagstauglichen“ und damit verständlich, nachvollziehbaren Lösung zu suchen. Dein Schüler wird es dir Danken und den Spaß an „Mathe“ behalten oder wieder finden !!

Der verständlichste Lösungsweg für diese Aufgabe:

Nach meiner Erfahrung, wird diese Aufgabe am verständlichsten über Verhältnisdarstellung / Dreisatzanwendung für die meisten Schüler nachvollziehbar:

Kran-1 (K1) und Kran-2 (K2) schaffen zusammen 100% einer Arbeit in 4 Stunden (4h)

K1+K2 = 4h für 100% Arbeit

Nach 1h fällt K1 und K2 mach alleine weiter bis das Schiff beladen ist, also bis die Arbeit 100% fertig ist.

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Wenn K1+K2 also 1h zusammen das Schiff beladen haben, eine Arbeit für die sie bis zum vollständigen beladen zusammen 4h brauchen, dann haben Sie in der 1h zusammen, ein Viertel (1/4) der Gesamtarbeit erledigt und es ist somit noch drei Viertel (3/4) der Arbeit von K2 zu machen.

Im Aufgabentext wird gesagt, dass K2, nachdem er erst 1h zusammen mit K1 das Schiff beladen hat, nach dieser Stunde, alleine noch 5h braucht bis die Arbeit fertig ist.

K2 braucht also 5h um allein 3/4 der Gesamtarbeit zu erledigen.

Mathematisch kann man das als Verhältnisbruch $\frac{5h}{\frac{3}{4}}$ schreiben. Für den Bruchstrich kannst du dir das Wort „für“ oder „zu“ denken.

Die Ausgangsfrage war: Wie lange „würde“ jeder Kran alleine für die gesamte Arbeit brauchen ?

Vom K2 wissen wir also schon mal, dass er **5h** für **3/4** der Gesamtarbeit braucht und fragen uns nun:

Wie viel **Stunden x** braucht er um **4/4** der Gesamtarbeit – also „Alles“ = Vollbeladung des Schiffes, zu erledigen. Diese Frage:

Wie viel Stunden x (schreibe „hx“) braucht K2 für **4/4** der Arbeit wenn er **5h** für **3/4** der Arbeit braucht, kann man als Gleichung oder Dreisatzverhältnis mit der Variablen x Stunden, wie folgt schreiben und lösen:

$$\frac{5h}{\frac{3}{4}} = \frac{xh}{\frac{4}{4}}$$

nach x umstellen

$$\frac{5h * \frac{4}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{xh}{}$$

4/4 = 1

und bei 5h / (3/4) ist zu beachten: Brüche werden dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert !

$$\frac{5h * 1}{1} * \frac{4}{3} = \frac{xh}{}$$

$$\frac{20}{3} h = \frac{xh}{}$$

$$6\frac{2}{3} h = \frac{xh}{}$$

$$1h = 60min, \quad \frac{2}{3} h = \frac{60 * 2}{3} = 40min$$

$$6h\,40\,Min. = \frac{xh}{\blacksquare}$$

Kran K2 braucht für die <u>gesamte</u> Arbeit **6h und 40 Minuten** wenn er <u>alleine</u>, <u>ohne</u> K1, arbeitet.

Jetzt wollen wir noch wissen, wie lange K1 alleine für die gesamte Arbeit brauchen würde.

Dazu rechnen wir zuerst aus was K2 in 4h erledigt wenn er in 6 Std 40 min = 20/3 h, alles = 1 Arbeit schafft:

$$\frac{x\ Arbeit\ ?}{4h} = \frac{1\ Arbeit}{\frac{20}{3}h}$$

$$\underline{x\ Arbeit\ in\ 4h\ ?} = \frac{1\ A * 4h}{\frac{20}{3}h}$$

$$\underline{x\ Arbeit\ in\ 4h\ ?} = \frac{4h}{\frac{20}{3}h}$$

$$\underline{x\ Arbeit\ in\ 4h\ ?} = \frac{4h}{1} * \frac{3}{20}$$

$$\underline{x\ Arbeit\ 4h\ ?} = \frac{12}{20}$$

$$\underline{x\ Arbeit\ 4h\ ?} = \frac{3}{5}$$

Wenn K1 und K2 also zusammen arbeiten um am Ende von 4h das Schiff voll beladen ist, dann hat K2 sich zu 3/5 an dieser Arbeit und K1 demnach zu 5/5 – 3/5 = 2/5 beteiligt.

Um jetzt festzustellen, wie viel Stunden K1 für diese 2/5 Arbeit braucht fragen wir:

Wie viel Stunden x (schreibe xh) würde K1 für die ganze Arbeit – also 5/5 – brauchen, wenn er, wie wir eben festgestellt haben, in 4h = 2/5 Arbeit schafft:

$$\frac{x\ h\ ?}{\frac{5}{5}h} = \frac{4h}{\frac{2}{5}h}$$

$$\underline{x\ h\ ?} = \frac{4h * \frac{5}{5}h}{\frac{2}{5}h}$$

$$\underline{x\ h\ ?} = \frac{4h * \ 1}{\frac{2}{5}h}$$

$$\frac{x\,h?}{} = \frac{4}{1} * \frac{5}{2}$$

$$\frac{x\,h?}{} = \frac{20}{2} = 10\ h$$

K1 braucht also 10h für die Schiffsbeladung wenn er es ohne Hilfe K2 machen würde

K2 braucht also 6h 40 min bzw, 20/3 h für die Schiffsbeladung wenn er es ohne Hilfe K1 machen würde

11 GLEICHUNGEN HÖHEREN GRADES IN QUADRATISCHE GLEICHUNGEN ÜBERFÜHREN UND DIESE LÖSEN

$x^3 - 9x = 0$	: x
$x^2 - 9 = 0$	+ 9
$x^2 = 9$	Wurzel ziehen (Radizieren)

x1 = +√9 = 3

x2 = -√9 = - 3

LS9-S40-A2a:

$7x^2+14x+7 = 24x * (x+1)^2$	Rechts: $(x+1)^2$ = 1. BinoFormel Links: 7 (…..) ergibt ebenfalls 1. BinoFormel
$7(x^2+2x+1) = 24x * (x+1)^2$	Links: Für x^2+2x+1 setze ein; 1. Binom = $(x+1)^2$
$7(x+1)^2 = 24x * (x+1)^2$	- 7 (x+1): Wir setzen die Gleichung also Null. Damit 24x positiv bleibt, bringen wir dazu die linke Seite nach rechts.
$0 = 24x * \mathbf{(x+1)^2} - 7\,\mathbf{(x+1)^2}$	Ausklammern von $(x+1)^2$
$0 = \mathbf{(x+1)^2 * (}24x - 7)$	Die Gleichung ist wahr, wenn einer der beiden Faktoren $(x+1)^2$ oder (24x-7) gleich Null ist.

<u>Lösung-1:</u>

$(x+1)^2 = 0$	√-ziehen: $\sqrt{(x+1)^2} = x+1$ und $\sqrt{0} = 0$
$x+1 = 0$	- 1

x = -1

Lösung-2:

$24x-7 = 0$	+7
x = 7/24	: 24

L = -1 ; 7/24

12 PROZENTRECHNUNG

12.1 Berechnungsformeln

$$W = G \cdot \frac{p}{100} \qquad p = \frac{W}{G} \cdot 100 \qquad G = \frac{W}{p} \cdot 100$$

G = Grundwert W = Prozentwert p = Prozentsatz

12.2 Berechnung Prozentwert

Herr Johannsen verkauft sein Haus durch einen Makler für 450 000 €.
Der Makler erhält 3,5% Provision.

$G = 450000\ € \quad W = ?$

$p = 3{,}5\%$

$$W = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{450000\ € \cdot 3{,}5}{100} = 15750\ €$$

Die Provision beträgt $\underline{\underline{15750\ €}}$

12.3 Berechnung Prozentsatz

Ein Gebrauchtwagenhändler kaufte ein Auto für 12400 €.
Nach einiger Zeit konnte er den Wagen für 13200 € weiterverkaufen.

Wie viel Prozent betrug sein Gewinn?

$G = 12400\ € \quad p = ?$

$W = 13200\ € - 12400\ € = 800\ €$

$$p = \frac{W \cdot 100}{G} = \frac{800\ € \cdot 100}{12400\ €} = 6{,}45\%$$

Der Gewinn betrug $\underline{\underline{6{,}45\%}}$

12.4 Berechnung Grundwert

Beim Kauf einer Wohnzimmereinrichtung werden 30% angezahlt.
Dies sind 3852 €.

Wie hoch ist der Kaufpreis?

$p = 30\% \quad G = ?$

$W = 3852\ €$

$$G = \frac{W \cdot 100}{p} = \frac{3852\ € \cdot 100}{30} = 12840\ €$$

Der Kaufpreis beträgt $\underline{\underline{12840\ €}}$

12.5 Berechnung vermehrter Grundwert

Nach einer Mieterhöhung von 4% muss eine Familie jetzt 473,60 € an Miete zahlen.
Wie hoch war die ursprüngliche Miete, wie hoch die Mieterhöhung in €?

Ansatz:

Die neue Miete beträgt 104% vom Grundwert.

$\Rightarrow 1{,}04 \cdot G = 473{,}60\ €$

$\Leftrightarrow G = \dfrac{473{,}60\ €}{1{,}04} = \underline{\underline{455{,}39\ €}}$ (alte Miete)

Mieterhöhung: $473{,}60\ € - 455{,}39\ € = \underline{\underline{18{,}21\ €}}$

12.6 Berechnung verminderter Grundwert

Nach einer Preissenkung von 10% kostet eine Ware nur noch 108 €.

Wie hoch war der ursprüngliche Verkaufspreis?

Ansatz:

Der neue Preis beträgt 90% vom Grundwert.

$\Rightarrow 0{,}9 \cdot G = 108\ €$

$\Leftrightarrow G = \dfrac{108\ €}{0{,}9} = 120\ €$

Der ursprüngliche Verkaufspreis betrug $\underline{\underline{120\ €}}$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

13 POTENZEN – 9. KL.GYM

13.1 Potenzen mit gleicher Basis

A1-LS9-ArbHeft-S.28:

Erkläre warum das Potenzgesetz gilt:

a) Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Exponenten addiert werden.

ErklärungsBeispiel:

$$x^3 * x^4 * \;=\; \underbrace{(x * x * x)}_{x^3} * \underbrace{(x * x * x * x)}_{x^4} \;=\; x^{3+4} \;=\; x^7$$

$$= x^3 * x^4$$

b) Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Exponenten subtrahiert werden.

ErklärungsBeispiel:

$$y^5 : y^3 = \frac{\cancel{y} * \cancel{y} * \cancel{y} * y * y}{\cancel{y} * \cancel{y} * \cancel{y}} = y^{5-3} = y^2$$

A2-LS9-ArbHeft-S.28:

Vereinfache:

a) $a^5 * a^4 = a^{5+4} = a^9$

b) $b^9 : b^3 = b^{9-3} = b^6$

c) $c^7 * c^{-2} = c^{7+(-2)} = c^5$

d) $d^{-4} * d^{-1} = d^{-4-1} = d^{-6}$

e) $r^{-3} : r^{-2} = r^{-3-(-2)} = r^{-3+2} = r^{-1}$

f) $s^8 : s^{-3} = s^{8-(-3)} = s^{8+3} = s^{11}$

g) $t^{-4} * t^8 = t^{-4+(8)} = t^4$

h) $u^{-5} : u = u^{-5-1} = u^{-6}$

A3-LS9-ArbHeft-S.28:

Korrigiere die notierte Regel und ergänze das Beispiel

Falsch: Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten addiert

Richtig: Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert

$$(z^3)^2 = (z^3) * (z^3) = (z * z * z) * (z * z * z) = z^{3*2} = z^6$$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

A4-LS9-ArbHeft-S.28:

Notiere drei verschiedene Potenzen, die Wertgleich mit der vereinfachten Potenz sind:

14 WURZELN – RADIZIEREN – 9. KL.GYM

Was heißt eigentlich $\sqrt[3]{9}\ = \ ??$

Antwort: Man stellt mit $\sqrt[3]{9}\ = \ ??$ die Frage: Welche Zahl **x ergibt = 9 wenn man sie 3-mal mit sich selbst multipliziert** bzw. welche Zahl **x^3 ergibt = 9?**

Antwort: $\sqrt[3]{9}\ =\ 3$ **denn** $3^3 = 3 * 3 * 3 = 9$

A2-LS9-ArbHeft-S.30:

Schätze den Näherungswert für die Kubikwurzel wie im Beispiel.

Berechne anschließend zur Probe mit dem Taschenrechner den Wert und runde auf zwei Stellen nach dem Komma.

Beispiel:

$$\sqrt[3]{23} = ?$$

Du suchst eine Zahl x die 3mal mit sich selbst multipliziert = 23 ergibt:

1. Schätzung mit **3**: 3*3*3 = 3^3 = **27** das ist > **23**

Die 1. Schätzung mit „3“ war zu groß, also macht man die:

2. Schätzung mit **2**: 2*2*2 = 2^3 = **8** das ist < **23**

$$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{23} < \sqrt[3]{27}$$

Schreiben jetzt unter der Wurzel $\sqrt[3]{8}$ statt 8, die Zahl 8 als dritte Potenz: $\sqrt[3]{2^3}$

Schreiben jetzt unter der Wurzel $\sqrt[3]{27}$ statt 27, die Zahl 27 als dritte Potenz: $\sqrt[3]{3^3}$

$$\sqrt[3]{2^3} < \sqrt[3]{23} < \sqrt[3]{3^3}$$

Wenn der Exponent der Zahl unter der Wurzel = dem Exponent der Wurzel ist, kann die Wurzel wegfallen:

$$2 < \sqrt[3]{23} < 3$$

Antwort: Die Lösung von $\sqrt[3]{23}$ ist eine Zahl die **größer als 2** und **kleiner als 3 ist** !

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

14.1 Potenzgesetze

Für alle a, b ϵ R^*_+ und alle u, v ϵ R ist:

$a^u \bullet a^v = a^{u+v}$ Multiplizieren bei gleicher Basis

$a^u : a^v = a^{u-v}$ Dividieren bei gleicher Basis

$a^u \bullet b^u = (ab)^u$ Multiplizieren bei gleichem Exponenten

$a^u : b^u = (a:b)^u$ Dividieren bei gleichem Exponenten

$(a^u)^v = a^{u \bullet v}$ Potenzieren von Potenzen

Dabei $a^0=1$ und $a^{-u} = \frac{1}{a^u}$

14.2 Wurzelgesetze

Gesetze	**Beispiele**
$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a*b}$	$\sqrt[4]{8} * \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{8*2} = \sqrt[4]{16} = 2$
$\sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$	$\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{4}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m*n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$\sqrt[2]{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[3]{9}$
$\sqrt[n]{a^n*b} = a*\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{64*5} = 4 * \sqrt[3]{5}$

A2b-LS9-ArbHeft-S.30:

$\sqrt[3]{90} = ?$

1. Schätzung: $5^3 = 125$ das ist > 90

2. Schätzung : $4^3 = 64$ das ist > 90

$$\sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{90} < \sqrt[3]{125}$$

$$\sqrt[3]{4^3} < \sqrt[3]{90} < \sqrt[3]{5^3}$$

$$4 < \sqrt[3]{90} < 5$$

A1-KANr.4-Maurice:

Vereinfache folgenden Terme. Gib das Ergebnis mit positiven Exponenten und falls möglich als Wurzel an

A1a.

$\left(b^{\frac{n}{4}} \cdot b^{\frac{n}{2}}\right) : b^{\frac{n}{8}}$ $= \left(b^{(\frac{n}{4}+\frac{n}{2})}\right) : b^{\frac{n}{8}}$ $= \left(b^{\frac{6n}{8}}\right) : b^{\frac{n}{8}}$ $= b^{\frac{6n}{8}-\frac{1n}{8}} = \boldsymbol{b^{\frac{5n}{8}}}$ Kann auch als Wurzel ausgedrückt werden:	Multiplizieren bei gleicher Basis: $\mathbf{b^3 \bullet b^2 = b^{(3+2)} = b^5}$ $HN\ von\ 2, 4\ und\ 8\ ist\ \ 2 \cdot 4 = 8$ $\rightarrow \frac{n \cdot 2}{4 \cdot 2} + \frac{n \cdot 4}{2 \cdot 4} = \frac{2n}{8} + \frac{4n}{8} = \frac{6n}{8}$ Dividieren bei gleicher Basis: $\mathbf{b^3 : b^2 = b^{(3-2)} = b^1}$

A1b.

$\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[4]{a^2}} : \frac{x^{-\frac{2}{5}}}{a^2}$	

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

15 MATHE - 11. KLASSE

15.1 Differenzenquotient und Differentialquotient

Bevor ich Differenzenquotient und Differentialquotient erkläre, eine Empfehlung:

Das Zeichnen einer Funktionsgleichung f(x) als Funktionsgraphen in ein Koordinatensystem hilft euch, dieses Thema der Mathematik und die Art der Aufgaben besser und schneller zu verstehen.

Da es zugegebener Maßen oft etwas mühselig ist, so einen Graphen ins Heft zu zeichnen, oder es in der Aufgabe gar nicht gefordert ist, ihre aber trotzdem wissen wollt wie der Graph aussieht, weil man an ihm die Nullstellen und sonstige Besonderheiten sehr gut sieht, dann nutzt doch einfach einen Funktionsplotter. So etwas haben ja schon viele Taschenrechner integriert, ich kann darüber hinaus, diesen Online-Funktionsplotter empfehlen:

http://rechneronline.de/funktionsgraphen/

15.1.1 Differenzenquotient

Ihr markiert euch zwei Punkte **$P_0(x_0 \mid f(x_0))$** und **$P(x \mid f(x))$** auf einem Funktionsgraphen.

Verbindet die zwei Punkte **P_0** und **P** durch eine Gerade (Sekante = berührt den Graph in zwei Punkten).

Die Steigung „**m**“ dieser Geraden ist der Differenzenquotient:

$$\boldsymbol{m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

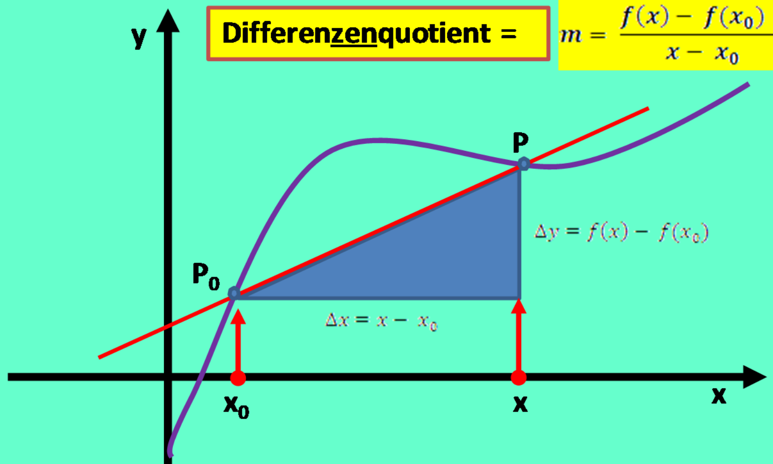
Das zugehörige Steigungsdreieck unter der Geraden **P_0-P** hat die Grundlinie $\boldsymbol{\Delta x}$ und die Höhe $\boldsymbol{\Delta y}$

$$\Delta y = f(x) - f(x_0)$$

Hochschule RheinMain • University of Applied Sciences *Guckelsberger © 2012*

Differenzenquotient

Differenzenquotient = $m = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



Differenzenquotient = Steigung m zwischen zwei Punkten P_0 und P

Differenzialquotient = 1.Ableitung von f(x)
= Steigung m an der Stelle x_0 also im Punkt P_0 .
Der Punkt **P** wird quasi nach links bis auf den Punkt **P_0** verschoben.

Dipl.-Ing. P. Guckelsberger (HSRM) – Vorlesung ab 26.03.2013 - Download: 1

15.1.2 Differentialquotient

$$DQ = ms = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \Big| \; mit \;\; h = x - x_0$$

15.1.2.1 Aufgabe

Berechnen Sie die Steigung von **$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2$** an der Stelle **$x_0 = -1$** mit Hilfe des Differentialquotienten!

Lösungshilfen: **http://www.youtube.com/watch?v=UjT-cV9Prew**

Wichtig:

Bei diesen Aufgabentypen musst du fast immer eine Binomische Formel erkennen und anwenden.

Du musst Sie können oder auf dem Spikzettel haben. Hier sind sie noch mal zu Erinnerung:

1. Binom: **$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$**
2. Binom: **$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$**
3. Binom: **$(a - b)*(a + b) = (a + b)*(a - b) = a^2 - b^2$**

Merke: Diese Aufgaben werden in Drei Schritte gelöst:

(1) In f(x) für alle x den DQ-Term (x+h) einsetzen und diesen Term dann für den DQ-Term f(x+h) einsetzen. Für den zweiten DQ-Term f(x) die gegebene Funktion einsetzen. Dann den Zähler soweit vereinfachen wie es geht. Auf diesem Weg stößt mn meist auf eine Binomische Formel. Ziel ist es, das h aus dem Nenner zu kürzen. Hat man das erreicht, dann ist dies die Steigung der Sekante m_S.

(2) Grenzwert (limes) h gegen 0 bilden. Also h = 0 einsetzen. Das ist quasi die 1. Ableitung und entspricht der Steigung m_T der Tangente im Punkt an der Stelle x_0

(3) In die Steigung der Tangente m_T nun den x-Wert (hier x_0 = -1 einsetzen. Das Ergebnis ist der Zahlenwert der Tangentensteigung m_T

[1]f(x) in DQ einsetzen ergibt die Steigung der Sekante ms

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2 \quad | \quad x_0 = -1$$

Der Punkt für den die Tangentensteigung mt gesucht ist hat die Koordinaten:

$$P\left(x_0 \;\middle|\; -\frac{1}{2}x^2 - 2\right) = \left(-1 \;\middle|\; -\frac{1}{2} * (-1)^2 - 2\right) = (-1 \,|\, -2,5)$$

$$DQ = ms = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Wichtiger Schritt:

$\boldsymbol{a)}$ $\boldsymbol{Geg:}$ $\quad -\frac{1}{2}\,x^2 - 2$ $\quad \Big|$ *setze für* $\boldsymbol{x}$ *den Term* $(\boldsymbol{x+h})$

$-\frac{1}{2}\,(\boldsymbol{x+h})^2 - 2$ $\quad \Big|$ *Das setzt Du nun im DQ für* $f(x+h)$ *ein.*

und weiterhin setzt man im DQ für f(x) die gegebene Funktion $(-\frac{1}{2}\,x^2 - 2)$ ein.

$$DQ = ms = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$DQ = ms = \frac{(-\frac{1}{2}\,(x+h)^2 - 2) - (-\frac{1}{2}\,x^2 - 2)}{h}$$

$$DQ = ms = \frac{(-\frac{1}{2}\,(x^2 + 2xh + h^2) - 2) - (-\frac{1}{2}\,x^2 - 2)}{h}$$

$$DQ = ms = \frac{-\frac{1}{2}x^2 - xh - \frac{1}{2}h^2 - 2 + \frac{1}{2}\,x^2 + 2}{h} \quad \Big| \; \textit{Die roten Terme heben sich auf.}$$

$$DQ = ms = \frac{-xh - \frac{1}{2}h^2}{h} \quad \Big| \; h\,(\ldots)\textit{und kürzen}$$

$$DQ = ms = \frac{\cancel{h}\,(-x - \frac{1}{2}h)}{\cancel{h}} = -x - \frac{1}{2}h \quad \Big| \; \textit{jetzt} \lim_{h\to 0}\,(\ldots)$$

$$\lim_{h\to 0}\,(-x - \frac{1}{2}h) \quad \Big| \; h = 0 \; \textit{setzen, ergibt} \; m_T = \textit{Tangentensteigung im P}$$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

$$m_T \;=\; -x \quad \Big| \; Geg.:\ x_0 = -1\ einsetzen$$

Das ergibt dann den Zahlenwert für die gesuchte Tangentensteigung m_T des Funktionsgraphen **$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2$** an der Stelle **$x_0 = -1$** bzw. im Punkt **$P_0(x_0 \mid f(x_0)) = P_0(-1 \mid -\frac{1}{2}x^2 - 2) = P_0(-1 \mid -2{,}5)$**

$$\boldsymbol{m_T \;=\; -1x = -1 * (-1) = 1} \quad \Big|$$

Antwort:

Der Funktionsgraph der Funktion **$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2$** hat an der Stelle **$x_0 = -1$** bzw. im Punkt **$P_0(x_0 \mid f(x_0)) = P_0(-1 \mid -\frac{1}{2}x^2 - 2) = P_0(-1 \mid -2{,}5)$** eine Tangente mit der Steigung $m_T = 1$

Das bedeutet immer:

Der Tangens des Steigungswinkels der Tangente ist im **$P_0(-1 \mid -2{,}5)$ gleich Null.**

15.2 Hoch- und Tiefpunkte von Funktionen höheren Grades

Bestimme die Hoch- und Tiefpunkte

$\mathbf{f(x) = 4/5\, x^5 - 10/3\, x^3 + 9/4\, x}$

1. Ableitung

$f'(x) = 5*4/5\, x^4 - 3*10/3\, x^2 + 9/4$

$f'(x) = 4\, x^4 - 10\, x^2 + 9/4$

2. Ableitung

$f''(x) = 4*4\, x^3 - 2*10\, x$

$f''(x) = 16\, x^3 - 20\, x$

1. Ableitung f'(x) = 0 setzen und x ausrechnen:

$0 = 4\, x^4 - 10\, x^2 + 9/4$

Substi: $\mathbf{z = x^2}$

$0 = 4\, z^2 - 10\, z + 9/4 \quad | :4$

$0 = z^2 - 2{,}5\, z + (9/16) \quad | \; p = -2{,}5 \; ; \; q = (9/16)$

pq-Formel:

$$z_{1/2} = -\left(\frac{p}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$z_{1/2} = -\left(\frac{-2{,}5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-2{,}5}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{16}\right)}$$

$$z_{1/2} = 1{,}25 \pm \sqrt{1{,}56 \quad - 0{,}56)}$$

$$z_{1/2} = 1{,}25 \pm \sqrt{1)}$$

$$z_{1/2} = 1{,}25 \pm 1{,}0$$

Damit ergibt sich für x_1; x_2 ; x_3 und x_4 :

$z_1 = 1{,}25 + 1{,}0 = 2{,}25 \quad | \; z = x^2$

$(x_1)^2 = 2{,}25 \quad | \sqrt{}$

$x_1 = -\sqrt{2{,}25} = -1{,}5$

$x_2 = +\sqrt{2{,}25} = +1{,}5$

$z_2 = 1{,}25 - 1{,}0 = 0{,}25 \quad | \; z = x^2$

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

$(x_2)^2 = \quad 0,25 \quad | \sqrt{\ }$

$x_3 = + \sqrt{0,25} = +0,5$

$x_4 = - \sqrt{0,25} = -0,5$

Kontrolle auf Min oder Max

f''(x_1) = 16 x^3 – 20 x   I x_1 = 1,5

f''(x_1) = 16 * $1,5^3$ – 20*1,5 = **+24 > 0 ⇨ Minimum**

----

f''(x_2) = 16 x^3 – 20 x   I x_2 = - 1,5

f''(x_2) = 16 * ($-1,5^3$ – 20*(-1,5) = **-24 < 0 ⇨ Maximum**

----

f''(x_3) = 16 x^3 – 20 x   I x_3 = 0,5

f''(x_3) = 16 * $0,5^3$ – 20*0,5 = **- 8 > 0 ⇨ Maximum**

----

f''(x_4) = 16 x^3 – 20 x   I x_3 = - 0,5

f''(x_4) = 16 * ($-0,5^3$) – 20* (-0,5) = **+8**

+ 8 > 0 ⇨ Minimum

x_1 bis x_4 in f(x) ergibt den Extrempunktkoordinaten P(xIy)

f(x) = 4/5 x^5 – 10/3 x^3 + 9/4 x   I x_1 = 1,5

f(x_1) = 4/5 *$1,5^5$ – 10/3*$1,5^3$ + 9/4*1,5 = **-1,8**

----

f(x) = 4/5 x^5 – 10/3 x^3 + 9/4 x   I x_2 = -1,5

f(x_2) = 4/5 *$(-1,5)^5$ – 10/3*$(-1,5)^3$ + 9/4*(-1,5) = **+1,8**

----

f(x) = 4/5 x^5 – 10/3 x^3 + 9/4 x   I x_3 = 0,5

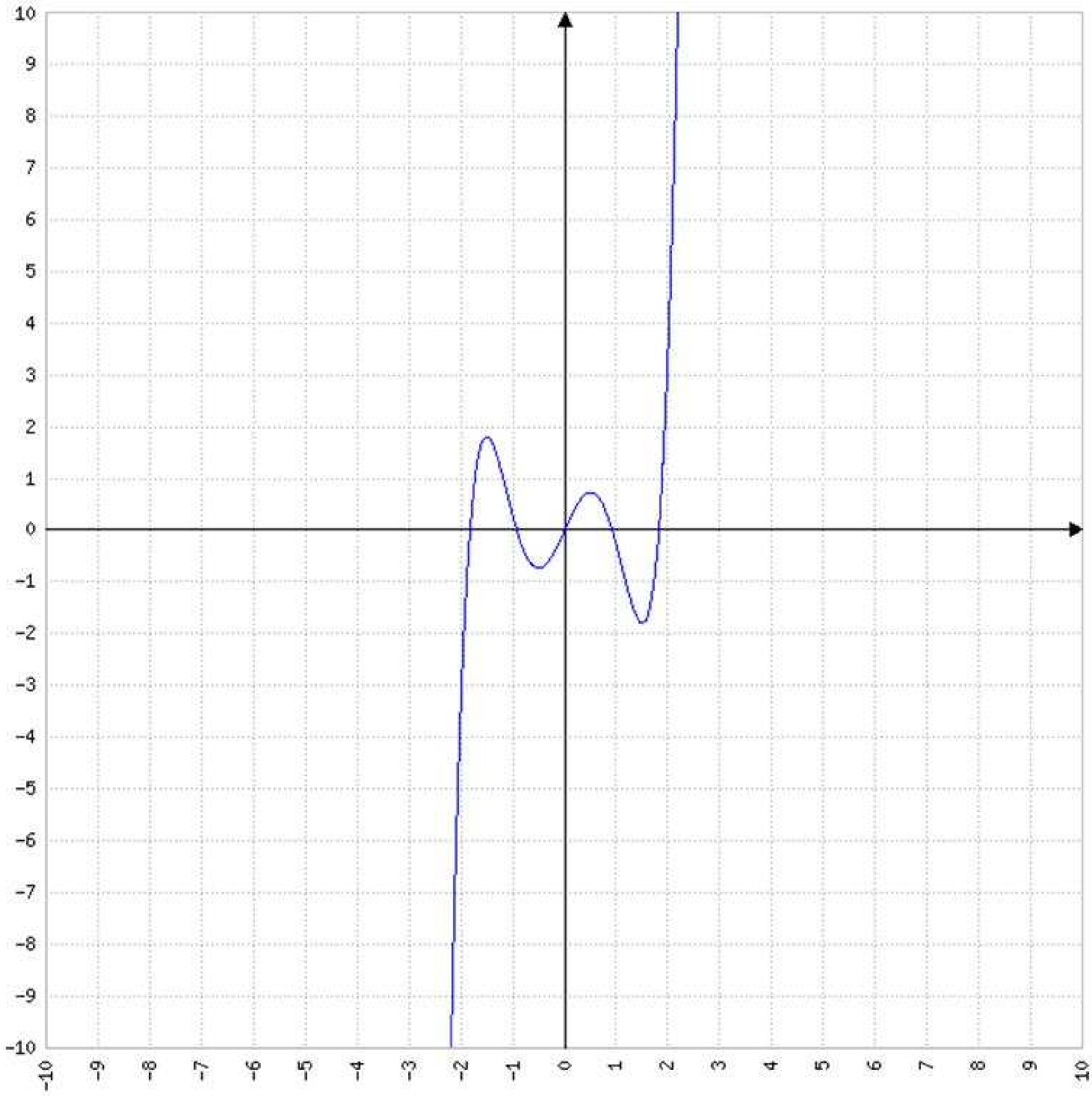
f(x_3) = 4/5 *$(0,5)^5$ – 10/3*$(0,5)^3$ + 9/4*(0,5) = **+0,73**

----

f(x) = 4/5 x^5 – 10/3 x^3 + 9/4 x   I x_4 = -0,5

f(x_4) = 4/5 *$(-0,5)^5$ – 10/3*$(-0,5)^3$ + 9/4*(-0,5) = **- 0,73**

HP1(-1,5I1,8) ; TP1(1,5I-1,8) ; HP2(0,5I0,73) ; TP3(-0,5I-0,73)


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

16 WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG - STOCHASTIK

Dieses Thema wird ist in einem eigenständigen Dokument behandelt!

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

17 EINHEITEN VON GRÖßEN

17.1 Gewicht - Masse

*Um von Tonne [t] auf Kilogramm [kg] umzurechnen multiplizieren wir die Tonnen **mal** 1000.*
Bsp.: 2 t** = 2 t * 1000 = **2000kg
*Um von Kilogramm [kg] auf Tonne [t] umzurechnen dividieren wir die kg **durch** 1000.*
Bsp.: 1000kg =** 1000kg : 1000 = **1,00 t

Merken / lernen:

t		kg	kg		t
1,00 t	=	1000,00 kg	1,00 kg	=	0,001 t

kg		g	g		kg
1,00 kg	=	1000,00 g	1,00 g	=	0,001 kg

g		mg	mg		g
1,00 g	=	1000,00 mg	1,00 mg	=	0,001 g

Aufg-01: Vervollständige die Tabelle

t		kg	kg		t
0,50 t	=		*3000,00 kg*	=	
	=	*2500,00 kg*		=	*0,007 t*
35,00 t	=		*40,00 kg*	=	

Aufg-02: Ein Hecht wiegt 6,5 kg.

d wieviel Gramm weiget der Hecht ?

Hechtgewicht	6,5 kg
Hechtgewicht	t
Hechtgewicht	g

Aufg-03: Vervollständige die Tabelle

g		mg	mg		g
20,00 g	=			=	*0,002 g*
	=	*250,00 mg*	*10000,00 mg*	=	

17.2 Rauminhalte – Volumen

Merken / lernen:

km³		m³	m³		km³
1,00 km³	=	1.000.000.000,00 m³	1,00 m³	=	0,000000001 km³

m³		dm³	dm³		m³
1,00 m³	=	1.000,00 dm³	1,00 dm³	=	0,001 m³

dm³		cm³	cm³		dm³
1,00 dm³	=	1.000,00 cm³	1,00 cm³	=	0,001 dm³

Mal 1000 ⇨

cm³		mm³	mm³		cm³
1,00 cm³	=	1.000,00 mm³	1,00 mm³	=	0,001 cm³

Hektoliter - Liter - Zentiliter - Milliliter

dm³		cm³		Liter		Zentiliter
1,00 dm³	=	1.000,00 cm³	=	1,00 l	=	100,00 zl
0,01 dm³	=	10,00 cm³	=	0,01 l	=	1,00 zl

Hektoliter		Liter		Liter		Hektoliter
1,00 Hl	=	100,00 l	=	1,00 l	=	0,01 Hl

Zentiliter		Milliliter		cm³
1,00 zl	=	10,00 ml	=	10,00 cm³
0,1 zl	=	1,00 ml	=	1,00 cm³

Aufg-04: **Vervollständige die Tabelle**

km^3		m^3	m^3		km^3
1,00 km^3	=		1,00 m^3	=	

m^3		dm^3	dm^3		m^3
1,00 m^3	=		1,00 dm^3	=	

dm^3		cm^3	cm^3		dm^3
1,00 dm^3	=			=	0,001 dm^3

cm^3		mm^3	mm^3		cm^3
1,00 cm^3	=		1,00 mm^3	=	

Hektoliter - Liter - Zentiliter - Milliliter

dm^3		cm^3		Liter		Zentiliter
	=	1.000,00 cm^3	=	1,00 l	=	
	=	10,00 cm^3	=		=	1,00 zl

Hektoliter		Liter		Liter		Hektoliter
1,00 Hl	=		=		=	0,01 Hl

Zentiliter		Milliliter		cm^3
	=	10,00 ml	=	
	=	1,00 ml	=	

* | * | *

mm³		cm³		dm³		m³
	=		=		=	1,0

: 10^3 | : 10^3 | : 10^3

: 10^2

mm²		cm²		dm²		m²
	=		=		=	

: 10^2

: 10^1

mm		cm		dm		m
	=		=		=	

: 10^1

Fülle die fehlenden Felder aus:

mm^3		cm^3		dm^3		m^3
	=		=		=	1,5

mm^3		m^3
1.000.000,00	=	

cm^3		m^3
	=	1,0

mm^2		cm^2		dm^2		m^2
	=		=		=	1,7

mm^2		dm^2		m^2
	=	110	=	

mm		cm		dm		m
	=		=		=	5,0

mm		dm		m
5.000.500,0	=		=	5,0

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

Kurt-Schumacher-Ring 18
D-65197 Wiesbaden
www.hs-rm.de

18 QUELLENVERZEICHNIS

Lambacher Schweizer Mathematikbuchserie für Hessen

http://www.mathematik-wissen.de